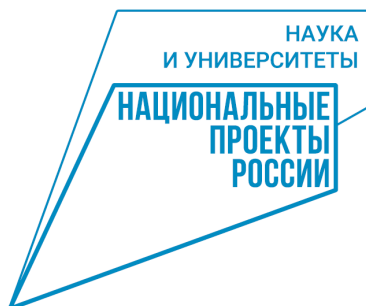


**Международная школа
молодых ученых
"Моделирование и
оптимизация сложных
систем" МОС-2024**

28 июня – 3 июля 2024 г., г. Суздаль

ПОСТЕРНЫЕ ДОКЛАДЫ



Steklov International Mathematical Center



Анализ асимптотической сходимости периодического решения уравнения Мэки–Гласса к решению предельного релейного уравнения

В.В. Алексеев, М.М. Преображенская (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)



Уравнение Мэки–Гласса

$$\dot{u} = -\beta u + \frac{\alpha u(t-1)}{1 + (u(t-1))^\gamma} \quad (1)$$

$u(t) > 0$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

После замены $u = e^x$:

$$\dot{x} = -\beta + \alpha \frac{e^{x(t-1)-x}}{1 + e^{\gamma x(t-1)}} \quad (2)$$

Решение релейного уравнения

Теорема 1. Для любого $\beta > 0$ и достаточно больших α уравнение (3) с начальной функцией из множества начальных функций S имеет T -периодическое решение

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 - \beta t, & t \in [0, t_0], \\ x_0 - \beta t + \ln(\alpha e^\beta(t-t_0) + 1), & t \in [t_0, t_0 + 1], \\ x_0 - \beta t + \ln\left(\frac{\alpha^2}{2} e^{2\beta}(t-t_0-1)^2 + \alpha e^\beta(t-t_0) + 1\right), & t \in [t_0 + 1, t_1], \\ x_0 - \beta t + \ln\left(\frac{\alpha^2}{2} e^{2\beta}(t_1-t_0-1)^2 + \alpha e^\beta(t_1-t_0) + 1\right), & t \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (5)$$

Релейное уравнение

γ – большой параметр.

$$\dot{x} = -\beta + \alpha e^{x(t-1)-x} H(e^{x(t-1)}). \quad (3)$$

Функция переключения:

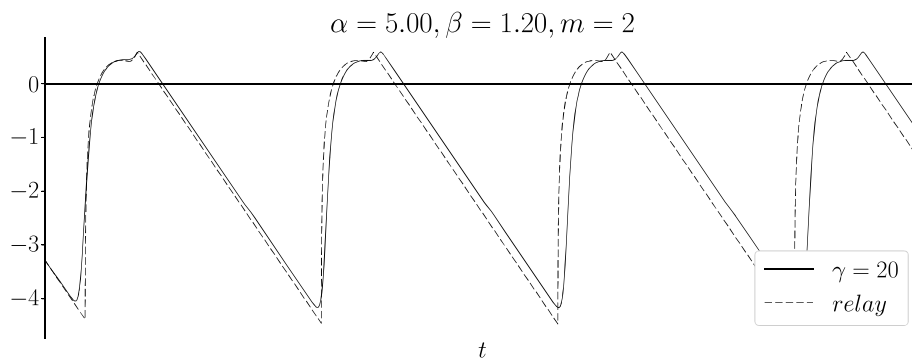
$$H(u) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + u^\gamma} = \begin{cases} 0, & u > 1, \\ \frac{1}{2}, & u = 1, \\ 1, & u < 1. \end{cases} \quad (4)$$

Множество начальных функций

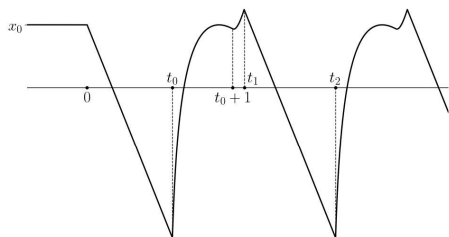
$S = \{\varphi \in C[-1, 0] : 0 < p \leq \varphi(t) \leq q \text{ при } t \in [-1, 0]\}$,

где $x_0 = \varphi(0) > 0$, $q, p > 0$.

Уравнение (2) при $\gamma = 20$ и соответствующее релейное уравнение



Решение релейного уравнения



Асимптотика решения при $\gamma \rightarrow +\infty$

Теорема 2. Пусть параметры α, β удовлетворяют условиям теоремы 1, $\gamma \gg 1$, $\sigma = \gamma^{-\nu}$, $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$. Уравнение (2) с произвольной начальной функцией $\varphi \in S$ из имеет решение $x_\gamma^*(t)$ с асимптотикой

$$x_\gamma^*(t) = \begin{cases} x_0 - \beta t + O(\gamma^{-1} e^{-\beta \sigma \gamma}), & t \in [0, t_0 - \sigma], \\ -\beta + \frac{1}{\gamma} w_0(\tau) |_{\tau=(t-t_0)\gamma} + O(\gamma^{-2\nu}), & t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \\ x_0 - \beta t + \ln(\alpha e^\beta(t-t_0) + 1) + O(\gamma^{-2\nu}) & t \in [t_0 + \sigma, t_0 + 1] \\ x_0 - \beta t + \ln\left(\frac{\alpha^2}{2} e^{2\beta}(t-t_0-1)^2 + \alpha e^\beta(t-t_0) + 1\right) + O(\gamma^{-2\nu}) & t \in [t_0 + 1, t_1 - \sigma] \\ x_0 - \beta t_1 + \ln(\eta) + \frac{1}{\gamma} w_1(\tau) |_{\tau=(t-t_1)\gamma} + O(\gamma^{1-3\nu}) & t \in [t_1 - \sigma, t_1 + \sigma] \\ x_0 - \beta t + \ln(\eta) + O(\gamma^{1-3\nu}) & t \in [t_1 + \sigma, t_2 - \sigma] \end{cases} \quad (6)$$

где $\eta = \frac{\alpha^2}{2} e^{2\beta}(t_1-t_0-1)^2 + \alpha e^\beta(t_1-t_0) + 1$. Асимптотические выражения написаны здесь в предположении $\gamma \rightarrow +\infty$. Все остатки равномерны по $\varphi \in S$ и t из соответствующих промежутков.

Благодарности

Исследование выполнено (частично, Алексеев В.В.) за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>, (частично, Преображенская М.М.) за счет гранта Российского научного фонда № 20-71-10110, <https://rscf.ru/project/20-71-10110/>.

Теорема 3. Пусть параметры $\alpha, \beta > 0$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда существуют такие значения параметров x_0, p, q и такое достаточно большое γ_0 , что при всех $\gamma > \gamma_0$ уравнение (2) с начальной функцией из множества S обладает периодическим решением $x_\gamma^*(t)$ периода T_γ , которое удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq T_\gamma} |x_\gamma^*(t) - x^*(t)| = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} T_\gamma = T. \quad (7)$$

Литература

[1] Mackey M. C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. V. 197. № 4300. P. 287–289.



Периодические решения класса дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающей нелинейностью, имеющей простое поведение на бесконечности



Баин Д.Д.

danila.bain@yandex.com

Ярославль, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Определение уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздыванием второго порядка

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(x(t-T)), \quad (1)$$

где $b, c > 0$, функция f непрерывно дифференцируема, и для неё существуют конечные пределы на плюс и минус бесконечности:

$$f_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad f_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x). \quad (2)$$

Анализ устойчивости состояний равновесия

Всякое состояние равновесия $x(t) = x_*$ системы (1) удовлетворяет соотношению $cx_* = f(x_*)$. Линеаризуя систему (1) около этого состояния равновесия, приходим к линейному уравнению

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \alpha \cdot y_T, \quad (3)$$

где $\alpha = f'(x_*)$, $y = y(t)$, $y_T = y(t-T)$. Подставляя анзац $y(t) = e^{\lambda t}$ в уравнение (3), придём к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + b\lambda + c = \alpha e^{-\lambda T} \quad (4)$$

Теорема 1. Если все корни уравнения (4) имеют отрицательную вещественную часть, то состояние равновесия x_* устойчиво. Если уравнение (4) имеет корень с положительной вещественной частью, то состояние равновесия x_* неустойчиво.

Теорема 2. Пусть

$$w_{\pm} = \frac{\sqrt{2c - b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4b^2c + 4\alpha^2}}}{\sqrt{2}}, \quad T_k^{\pm} = \frac{\arg\left(\frac{c - w_{\pm}^2}{\alpha} - i \frac{bw_{\pm}}{\alpha}\right) + 2\pi k}{w_{\pm}}, \quad (5)$$

где $\arg(\cdot) \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней тогда и только тогда, когда $w_+ \in \mathbb{R}$ и $T = T_k^+$ (или, соответственно $w_- \in \mathbb{R}$ и $T = T_k^-$) для некоторого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, и эта пара корней равна $\lambda = \pm iw_+$ (или, соответственно $\lambda = \pm iw_-$). При этом если $T = T_k^{\pm}$, $\lambda = iw_{\pm}$, то $\text{sign Re } \lambda'(T) = \pm 1$.

Теорема 3. Количество корней уравнения (4) в правой комплексной полуплоскости можно вычислить по следующей формуле (см. рис. 1):

$$N^u(b, c, \alpha, T) = \#\{\lambda : \lambda^2 + b\lambda + c = \alpha e^{-\lambda T}, \text{ Re } \lambda > 0\} = \begin{cases} 2\#\{k : T > T_k^+\}, & \alpha < -c \\ 2\#\{k : T > T_k^+\} - 2\#\{k : T \geq T_k^-\}, & 0 < |\alpha| < c \text{ и } b < \sqrt{2}\sqrt{c - \sqrt{c^2 - \alpha^2}} \\ 0, & 0 < |\alpha| < c \text{ и } b \geq \sqrt{2}\sqrt{c - \sqrt{c^2 - \alpha^2}} \\ 1 + 2\#\{k : T > T_k^+\}, & \alpha > c \end{cases}$$

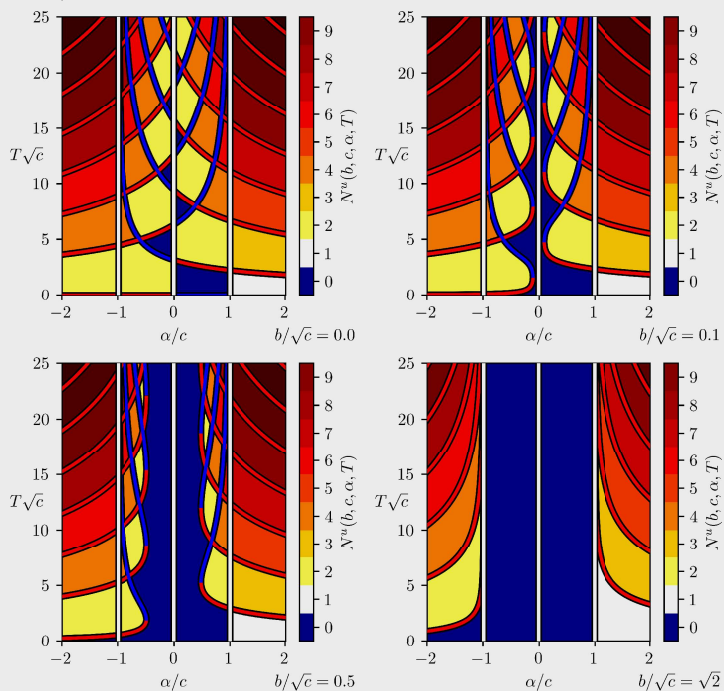


Рис. 1: Зависимость количества корней в правой комплексной полуплоскости N^u в зависимости от параметров b, c, α, T . Красными кривыми обозначены значения T_k^+ в зависимости от α/c , синими соответственно T_k^- . Заметим, что $\sqrt{2}\sqrt{c - \sqrt{c^2 - \alpha^2}} \leq \sqrt{2}\sqrt{c}$, поэтому, когда $b/\sqrt{c} \geq \sqrt{2}$ и $0 < |\alpha| < c$, нулевое состояние равновесия уравнения (3) устойчиво при любых T .

Циклы малой амплитуды

Пусть $b = b_0 + b_1\varepsilon$, $c = c_0 + c_1\varepsilon$, $T = T_0 + T_1\varepsilon$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon$. И при $\varepsilon = 0$ уравнение $\lambda^2 + b\lambda + c = \alpha e^{-T\lambda}$ имеет пару чисто мнимых корней $\lambda = \pm iw$, и остальные корни имеют отрицательную вещественную часть. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \alpha y_T + \beta y_T^2 + \gamma y_T^3, \quad (6)$$

где $\beta = f''(x_*)/2$, $\gamma = f'''(x_*)/6$. Будем искать периодические решения уравнения (6) в виде

$$y(t, \tau) = \varepsilon^{1/2} y_1(t, \tau) + \varepsilon y_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} y_3(t, \tau) + O(\varepsilon^2), \quad (7)$$

где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, функции $y_i(t, \tau)$ являются периодическими по t . Подставив анзац (7) в уравнение (6), приравнявая величины при одинаковых степенях ε , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2}: \quad & y_1(t, \tau) = \rho(\tau) \cos(\omega t + \varphi(\tau)) \\ \varepsilon^1: \quad & y_2(t, \tau) = \rho^2(\tau) \left(\frac{A_2 \cos(2\omega(t - T_0) + 2\varphi(\tau)) + B_2 \sin(2\omega(t - T_0) + 2\varphi(\tau))}{D_2} + C_2 \right) \\ \varepsilon^{3/2}: \quad & y_3(t, \tau) \text{ ограничено, если } \rho' = R_1\rho + R_3\rho^3, \quad \varphi' = F_0 + F_2\rho^2, \end{aligned}$$

где A_2, B_2, C_2, D_2 и R_1, R_3, F_0, F_2 — это константы, зависящие от параметров $w, b_0, b_1, c_0, c_1, T_0, T_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta, \gamma$.

Теорема 4. Если $R_1 > 0$ и $R_3 < 0$, то уравнение (6) имеет устойчивое периодическое решение вида (7), соответствующее $\rho(\tau) \equiv \sqrt{|R_1/R_3|}$.

Циклы большой амплитуды

Для построения периодических решений большой амплитуды в уравнении (1) выполним замену $x(t) = z(t)/\varepsilon$, $b = 2b_1\varepsilon$, $c = w^2$ и получим уравнение

$$\ddot{z} + 2\varepsilon b_1 \dot{z} + w^2 z = \varepsilon f(z/\varepsilon). \quad (10)$$

Так как при $\varepsilon = 0$ данное уравнение имеет периодические решения вида $\rho \cos(\omega t + \varphi)$, будем искать периодические решения данного уравнения в виде

$$z(t, \tau) = \rho(\tau) \cos(\omega t + \varphi(\tau)) + \varepsilon z_1(t, \tau) + O(\varepsilon^2), \quad (11)$$

где $\tau = \varepsilon t$. Подставим (11) в уравнение (10), получим

$$\ddot{z}_1 + w^2 z_1 = 2w \left(\frac{(b_1\rho + \rho') \sin(\omega t + \varphi) + \rho \varphi' \cos(\omega t + \varphi)}{\rho \varphi' \cos(\omega t + \varphi)} \right) + f \left(\frac{\rho \cos(\omega(t - T) + \varphi)}{\varepsilon} + z_{1T} + O(\varepsilon) \right) + O(\varepsilon).$$

Пусть $\mu = (f_+ + f_-)/2$, $\delta = (f_+ - f_-)/2$. Тогда слагаемое с f можно заменить на $\mu + \delta \text{sign}(\rho \cos(\omega(t - T) + \varphi))$ с ошибкой в решении порядка $O(\varepsilon)$. Решения уравнения

$$\ddot{z}_1 + w^2 z_1 = 2w \left(\frac{(b_1\rho + \rho') \sin(\omega t + \varphi) + \rho \varphi' \cos(\omega t + \varphi)}{\rho \varphi' \cos(\omega t + \varphi)} \right) + \mu + \delta \text{sign}(\rho \cos(\omega(t - T) + \varphi))$$

являются периодическими тогда и только тогда, когда

$$\rho' = -b_1\rho - \frac{2\delta \sin(\omega T)}{\pi w} \text{sign}(\rho), \quad \varphi' = -\frac{2\delta \cos(\omega T)}{|\rho|}.$$

Теорема 5. Если $b_1\delta \sin(\omega T) < 0$, то уравнение (10) имеет периодическое решение амплитуды порядка $-\frac{2\delta \sin(\omega T)}{b_1\pi w} + O(\varepsilon)$. Если $b_1 > 0$ и $\delta \sin(\omega T) < 0$, то это решение устойчиво, если $b_1 < 0$ и $\delta \sin(\omega T) > 0$, то это решение неустойчиво.

Конкретный пример

В качестве f рассмотрим функцию $f(x) = -\arctan(x)/\pi$. Тогда $f_- = \frac{1}{2}$, $f_+ = -\frac{1}{2}$, $\mu = 0$, $\delta = -1$. Точка $x = 0$ является единственным состоянием равновесия, и $\alpha = f'(0) = -1/\pi$, $\beta = f''(0)/2 = 0$, $\gamma = f'''(0)/6 = 1/(3\pi)$. Пусть $b = 0.001$, $c = 9$, и $T = T_1^+ + 0.01 \approx 2.071$. Тогда у уравнения (1) существует периодическое решение малой амплитуды около нулевого состояния равновесия, и периодическое решение большой амплитуды.

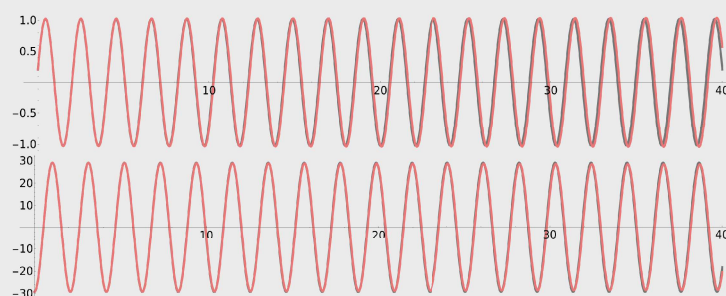


Рис. 2: сосуществующие циклы малой (сверху) и большой (снизу) амплитуды для уравнения (1). Розовым нарисовано численное решение, серым — соответствующее асимптотическое приближение (они накладываются друг на друга).

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПОПУЛЯЦИЕЙ НА ОКРУЖНОСТИ

Е. В. Винников,¹ А. С. Платов,²

Национальный исследовательский технологический университет МИСИС, Москва

¹evinnikov@gmail.com, ²platoymm@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Исследована задача оптимального управления популяцией. Динамика популяции описывается параболическим уравнением с периодичными по пространству коэффициентами и логистическим членом замыкания, который учитывает конкуренцию популяции за пространство. В качестве критерия оптимальности рассмотрен дисконтированный линейный функционал выгоды от эксплуатации популяции. Необходимое условие оптимальности управления, которое максимизирует выгоду, получено в виде вариационного неравенства.

ДИНАМИКА

Динамика популяции, определённой на множестве $x \in [0, \tau]$, задаётся системой:

$$\begin{cases} z_t = (\alpha(x)z_x)_x + (a(x) - u(x))z - b(x)z^2, & t \in (0, T], \\ z(0, x) = v(x), & t = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $z = z(t, x)$ — численность популяции в точке x в момент времени t . Функция $a(x) \in C^0([0, \tau])$ и положительная функция $b(x) \in C^0([0, \tau])$ имеют период τ . Здесь $a(x)$ — темп прироста, а коэффициент $b(x)$ отвечает за насыщение по численности популяции в точке x . Коэффициент диффузии $\alpha(x) \in C^1([0, \tau])$ положительный и τ -периодичный. Функция управления $u = u(t, x)$ определяет долю популяции, которая изымается в момент t в точке x . Управление популяцией рассматривается на конечном промежутке времени $[0, T]$, $T > 0$. Начальное распределение популяции задаётся функцией $v(x) \in L_2([0, \tau])$ и $v(x) \geq 0$ для $x \in [0, \tau]$. Периодические гетерогенные модели, подобные рассматриваемой, исследовались в работе [2], а оптимизационные задачи с различными критериями качества для этих систем рассматривались в работах [1], [3]-[5].

Множеством допустимых управлений — множество

$$\mathcal{U} = \{u \in L_2([0, T] \times [0, \tau]) \mid U_1 \leq u \leq U_2\},$$

где U_1, U_2 — некоторые константы, такие что $0 \leq U_1 < U_2 < \infty$

Функцию $z \in L_2(0, T; H_\alpha([0, \tau]))$, которая имеет период τ по переменной x , будем называть решением уравнения (1), если выполняются

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^\tau [-z\varphi_t + \alpha(x)z_x\varphi_x] dx dt &= \int_0^\tau v(x)\varphi(x, 0) dx + \\ &+ \int_0^T \int_0^\tau ((a(x) - u(x))z - b(x)z^2)\varphi dx dt, \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in W_2^{1,0}([0, \tau] \times [0, T]) \cap L_2(0, T; H_\alpha([0, \tau])) : \varphi|_{t=T} = 0$ и функция φ имеет период τ . Здесь $H_\alpha([0, \tau])$ — гильбертово пространство с нормой

$$\|z\|_{H_\alpha([0, \tau])} = \left\{ \|z\|_{L_2([0, \tau])}^2 + \|\alpha z_x\|_{L_2([0, \tau])}^2 \right\}^{1/2}.$$

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Критерием качества в задаче оптимального управления с дифференциальной связью (1) является функционал следующего вида:

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T \int_0^\tau e^{-rt} c(x) u(t, x) z(t, x) dx dt \rightarrow \max_{u \in \mathcal{U}}. \quad (2)$$

Здесь r — постоянный коэффициент дисконтирования, $r > 0$, и $c(x)$ — функция цены за единицу изымаемой популяции в точке x , $c(x) \in C^0([0, \tau])$. Данный критерий качества определяет выгоду за долю изымаемой из популяции с учётом дисконта.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Пусть u^* оптимальное управление задачи (1),(2); z^* — соответствующее ему решение уравнения (1) и ψ^* — вариация z для u^* . Тогда существует функция $\lambda \in C([0, T]; L_2(0, \tau)) \cap L_2(0, T; H_\alpha(0, \tau))$, удовлетворяющая сопряжённому уравнению

$$\lambda_t + (\alpha(x)\lambda_x)_x = -c(x)u^* + \lambda(r - a(x) + u^* + 2b(x)z^*\psi^*)$$

с условием трансверсальности

$$\lambda(T, x) = 0$$

и для любого управления $u \in \mathcal{U}$ выполняется неравенство

$$\int_0^T \int_0^\tau e^{-rt} (\lambda - c(x)) z^* (u^* - u) dx dt \geq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. O. Belyakov and A. A. Davydov, «Optimal Cyclic Harvesting of a Distributed Renewable Resource with Diffusion», Proc. Steklov Inst. Math. 315, 1–9 (2021).
- [2] Berestycki, H., Hamel, F., & Roques, L. (2005). Analysis of the periodically fragmented environment model.: I – Species persistence. Journal of Mathematical Biology, 51(1), 75–113. doi:10.1007/s00285-004-0313-3.
- [3] A. Davydov, E. Vinnikov, «Optimal Cyclic Dynamic of Distributed Population Under Permanent and Impulse Harvesting», Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 407. Springer, pp 101–112 (2022). https://doi.org/10.1007/978-3-031-17558-9_5
- [4] Suzanne M. Lenhart, Jiongmin Yong, Optimal control for degenerate parabolic equations with logistic growth // Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications, 1995, Volume 25, pp. 681-698
- [5] Vinnikov, E.V., Davydov, A.A. & Tunitsky, D.V. Existence of a Maximum of Time-Averaged Harvesting in the KPP Model on Sphere with Permanent and Impulse Harvesting. Dokl. Math. 108, 472–476 (2023). <https://doi.org/10.1134/S1064562423701387>

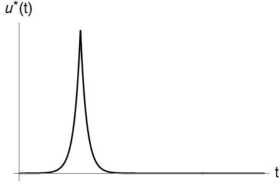
Построение асимптотического приближения для режима замирающего нейроосциллятора

В. К. Зеленова, М. М. Преображенская (rita.preo@gmail.com), Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова



Управляющий нейрон

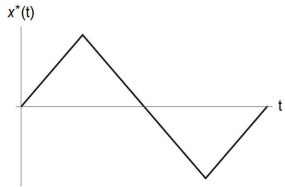
$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda f_\alpha(u(t-1))u, & (1) \\ f_\alpha(0) &= 1; \lim_{u \rightarrow +\infty} f_\alpha(u) = -\alpha \ (\alpha > 0); \\ f'_\alpha(u), u f''_\alpha(u) &= O(u^{-2}), \ u \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$



$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \max_t |x_\lambda^*(t) - x^*(t)| = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda^* = T^*,$$

$$x^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ -\alpha(t-t^*), & t \in [1, t^*+1], \\ t-T^*, & t \in [t^*+1, T^*], \\ x^*(t+T^*) = x^*(t), & \end{cases}$$

$$t^* = (\alpha + 1)/\alpha, \quad T^* = (\alpha + 1)^2/\alpha.$$



Управляемый нейрон

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \lambda(f_\beta(v(t-h)) + g(u(t)))v, & (2) \\ g(0) &= -\eta \ (\eta > 0); \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = \xi \ (\xi > 0); \\ g'(u), u g''(u) &= O(u^{-2}), \ u \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Экспоненциальная замена

Сделаем в (2) замену $v = e^{\lambda y}$:

$$\dot{y} = f_\beta(e^{\lambda y(t-h)}) + g(e^{\lambda x_\lambda^*(t)}). \quad (3)$$

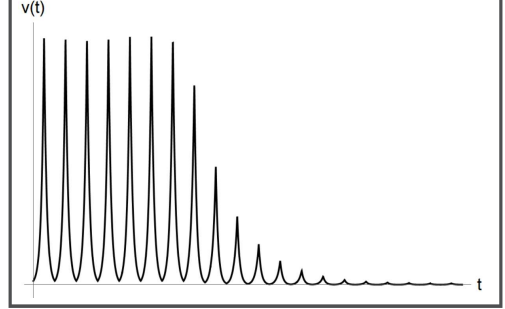
Начальное множество

$$\begin{aligned} \varphi &\in C[-h, 0], \quad \varphi(0) = -d, \\ \varphi(t) &< 0 \text{ при } t \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (4)$$

Ф и d_*

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= (\eta + \xi)f_\alpha(u) + (1 + \alpha)g(u), \\ \Phi(0) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \Phi(u) = -(\alpha + 1), \\ d_* &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\Phi(u) + \alpha + 1}{u} du. \end{aligned} \quad (5)$$

Замирающий нейроосциллятор



Результат

Теорема 1. Зафиксируем натуральное число n . Пусть функции f_α и g таковы, что $d_* < -\bar{d}$ для некоторого положительного фиксированного числа \bar{d} . Существуют параметры $\alpha, \beta, \eta, h, d$, такие, что для каждого $t_0 > h$ существует достаточно большое λ_0 , что при всех $\lambda > \lambda_0$ уравнение (3) с начальной функцией из множества (4) обладает решением $y_\lambda^*(t)$, для которого верны предельные равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \max_{t \in [0, t_0]} |y_\lambda^*(t) - y^*(t)| &= 0; \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y_\lambda^*(t) &= -\infty \text{ при фиксированном } \lambda. \end{aligned}$$

Предельное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(y(t-h)) + G(x^*(t)), & (6) \\ F(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\beta(e^{\lambda x}) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -\beta, & x > 0, \end{cases} \\ G(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(e^{\lambda x}) = \begin{cases} -\eta, & x < 0, \\ \xi, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

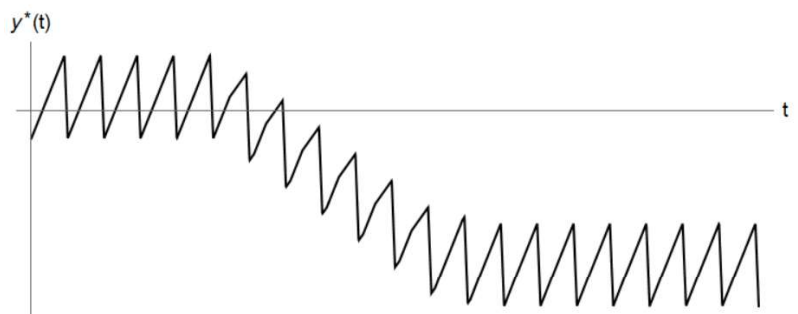
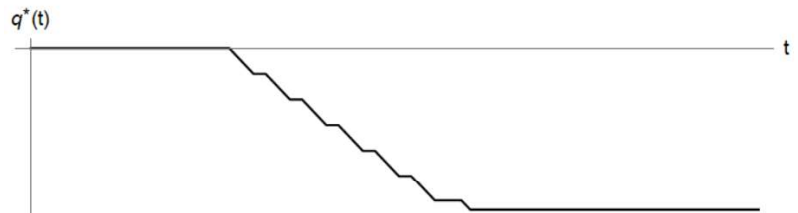
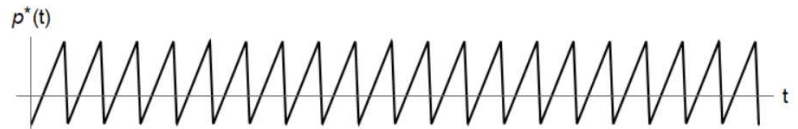
Расщепление в сумму

Решение (6) с начальной функцией (4) можно представить в виде $y^* = p^* + q^*$ решений следующих задач:

$$\begin{cases} \dot{p} = 1 + G(x^*(t)), \\ p|_{t=0} = -d, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{q} = F(p^*(t-h) + q(t-h)) - 1, \\ q(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (8)$$

$$y_\lambda^*(t) = p_\lambda^*(t) + q_\lambda^*(t), \quad p_\lambda^*(t + kT_\lambda^*) = p_\lambda^*(t) + k\left(\frac{d_*}{\lambda} + O(\lambda e^{-\mu\lambda})\right), \quad q_\lambda^*(t) = q^*(t) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$



Ссылки

- [1] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, Об одной модификации уравнения Хатчинсона. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 50:12 (2010), 2099–2112
- [2] Preobrazhenskaja MM. (2023). Relay System of Differential Equations with Delay as a Perceptron Model. Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI. NEUROINFORMATICS 2022. Studies in Computational Intelligence, vol 1064. Springer, Cham.
- [3] Zelenova V. K. Relay model of a fading neuron. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024; 32(2): 268–284.
- [4] M. M. Preobrazhenskaja, V. K. Zelenova, Asymptotic Approximation of Fading Mode in Neurooscillator Dynamics, submitted to Partial Differential Equations in Applied Mathematics (2024). Preprint: <https://arxiv.org/abs/2406.06155>

Благодарности

Работа выполнена частично (Преображенская М. М.) за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>; частично (Зеленова В. К.) в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2023-948).



МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ
СИСТЕМЫ

Суздаль, июнь-июль 2024.

ПОСТЕР

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ 3D УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ - СТОКСА
С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ ЖИЗНИ

Коптев Александр Владимирович

профессор ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург.

Alex.Koptev@mail.ru

Введение

Рассмотрим 3D уравнения Навье – Стокса для движения вязкой несжимаемой жидкости в безразмерных переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Где u, v, w, p основные неизвестные, соответственно компоненты вектора скорости и давление; Φ заданная функция потенциала внешних сил; Re – неотрицательный параметр, называемый числом Рейнольдса.

Уравнения (1-4) обладают интересными и во многом еще не изученными свойствами [1-2]. Одно из них заключается в том, что в некоторых случаях решения уравнений (1-4) существуют лишь при значениях t , которое находится в диапазоне $0 < t < t_*$ [3-4]. Можно сказать, что такие решения имеют конечное время жизни t_* . В данной работе предлагаются примеры построения таких решений.

Решения с конечным временем жизни

Рассмотрим решения уравнений (1-4), когда роль внешних сил играет сила тяжести. Для этого случая $\Phi = gz$, где g ускорение свободного падения.

Считаем, что движение потенциально (безвихревое), то есть справедливы равенства

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Считаем также, что движение происходит в большом и глубоком резервуаре, когда влиянием ограничивающих поверхностей можно пренебречь.

Кроме того потребуем выполнимости двух условий.

1). В заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ каждая из компонент вектора скорости обращается в нуль

$$u(x_0, y_0, z_0, t) = v(x_0, y_0, z_0, t) = w(x_0, y_0, z_0, t) = 0; \quad (6)$$

2). На бесконечности, при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$, каждая из компонент вектора скорости принимает заданные значения, соответственно u_0, v_0, w_0

$$u \rightarrow u_0, \quad v \rightarrow v_0, \quad w \rightarrow w_0,$$

$$\text{Если при } \varepsilon \rightarrow +0, \quad x = \frac{c_x}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad y = \frac{c_y}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad z = \frac{c_z}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (7)$$

В последних выражениях $u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z$ есть изначально заданные постоянные, удовлетворяющие ограничениям

$$c_x \neq 0, \quad c_y \neq 0, \quad c_z \neq 0, \quad w_0 \neq 0.$$

Можно показать [5-6], что потенциальные решения уравнений (1-4), удовлетворяющие условию (6) имеют вид

$$u = -\frac{A_1(t)sh(\frac{Re\theta_1}{2}) - B_1(t)\sin(\frac{Re\lambda_1}{2})}{2(sh^2(\frac{Re\theta_1}{4}) + \cos^2(\frac{Re\lambda_1}{4}))} + \frac{B_3(t)sh(\frac{Re\theta_3}{2}) + A_3(t)\sin(\frac{Re\lambda_3}{2})}{2(sh^2(\frac{Re\theta_3}{4}) + \cos^2(\frac{Re\lambda_3}{4}))},$$

$$v = -\frac{A_2(t)sh(\frac{Re\theta_2}{2}) - B_2(t)\sin(\frac{Re\lambda_2}{2})}{2(sh^2(\frac{Re\theta_2}{4}) + \cos^2(\frac{Re\lambda_2}{4}))} + \frac{B_1(t)sh(\frac{Re\theta_1}{2}) + A_1(t)\sin(\frac{Re\lambda_1}{2})}{2(sh^2(\frac{Re\theta_1}{4}) + \cos^2(\frac{Re\lambda_1}{4}))}, \quad (8)$$

$$w = -\frac{A_3(t)sh(\frac{Re\theta_3}{2}) - B_3(t)\sin(\frac{Re\lambda_3}{2})}{2(sh^2(\frac{Re\theta_3}{4}) + \cos^2(\frac{Re\lambda_3}{4}))} + \frac{B_2(t)sh(\frac{Re\theta_2}{2}) + A_2(t)\sin(\frac{Re\lambda_2}{2})}{2(sh^2(\frac{Re\theta_2}{4}) + \cos^2(\frac{Re\lambda_2}{4}))},$$

$$p - p_0 = -gz - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (9)$$

В последнем выражении φ есть потенциал скорости, который представляется суммой трех слагаемых

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

когда

$$\varphi_k = \frac{2}{Re} \ln(\cos^2 \frac{Re\lambda_k}{4} + sh^2 \frac{Re\theta_k}{4}), \quad k=1,2,3, \quad (10)$$

$$\theta_1 = A_1(t)(x - x_0) - B_1(t)(y - y_0), \quad \lambda_1 = B_1(t)(x - x_0) + A_1(t)(y - y_0),$$

$$\theta_2 = A_2(t)(y - y_0) - B_2(t)(z - z_0), \quad \lambda_2 = B_2(t)(y - y_0) + A_2(t)(z - z_0), \quad (11)$$

$$\theta_3 = A_3(t)(z - z_0) - B_3(t)(x - x_0), \quad \lambda_3 = B_3(t)(z - z_0) + A_3(t)(x - x_0).$$

Где $A_k(t), B_k(t)$ при $k=1,2,3$ – пока не определенные функции времени, удовлетворяющие условию

$$A_1^2(t) + A_2^2(t) + A_3^2(t) = B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t). \quad (12)$$

Действительно, при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ выполнено $\theta_i = \lambda_i = 0$. Тогда из (8) следует $u = v = w = 0$ и условие (6) выполнено.

Ясно, что поведение u, v, w на бесконечности во многом определяется знаком аргументов гиперболических функций при больших по модулю значениях этих аргументов. Иными словами важен знак величин θ_k . Чтобы удовлетворить условию (7) должны быть определены функции времени $A_k(t), B_k(t)$.

При этом имеет место закономерность: две из указанных функций могут быть выбраны произвольно, тогда как остальные четыре через них однозначно выражаются.

Пусть в качестве свободно выбранных функций будут $A_1(t), B_1(t)$. Тогда в зависимости от выбора этих функций выражения для неизвестных u, v, w, p изменяют свой вид. Причем, при $t > t_*$, где t_* некоторая конечная величина, условию (7) удовлетворить нельзя. Отсюда следует, что для решений (8-9) удовлетворяющих условиям (6-7) время жизни равно t_* .

Проиллюстрируем вышесказанное примером. Если положить

$$c_x = 1, \quad c_y = 2, \quad c_z = -3, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 4, \quad (13)$$

то область величин $A_1(t), B_1(t)$, внутри которой можно удовлетворить условию (7), представляет прямоугольник на плоскости, когда $A_1(t)$ откладываются вдоль оси абсцисс, а $B_1(t)$ – вдоль оси ординат. Вершины этого прямоугольника располагаются в точках $(\pm 6; \pm 3)$. Диагональ, соединяющая точки $(-6; -3)$ и $(6; 3)$ разбивает указанный прямоугольник на

две треугольные области. Если точка $(A_1(t); B_1(t))$ располагается в нижней треугольной области, то выполнено $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0$. Если точка $(A_1(t); B_1(t))$ располагается в верхней треугольной области, то выполнено $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y < 0$. Если точка $(A_1(t); B_1(t))$ располагается вне указанного прямоугольника, то решений, удовлетворяющих условиям (7) не существует.

Рассмотрим подробнее случай, когда функции $A_1(t)$ и $B_1(t)$ выбраны в виде

$$A_1(t) = t^2, \quad B_1(t) = t. \quad (14)$$

Тогда при $0 < t < 2$ точка $(A_1(t); B_1(t))$ находится внутри верхнего треугольника с вершинами $(-6; -3)$, $(-6; 3)$, $(6; 3)$ и выполнены неравенства $\theta_1 < 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 > 0$. При $2 < t < \sqrt{6}$ точка $(A_1(t); B_1(t))$ находится внутри нижнего треугольника с вершинами $(-6; -3)$, $(6; 3)$, $(6; -3)$ и выполнены неравенства $\theta_1 > 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 < 0$. Если $t > \sqrt{6}$ то точка $(A_1(t); B_1(t))$ находится вне указанного четырехугольника и решения, удовлетворяющего условиям (7), не существует.

Таким образом, при выборе функций $A_1(t); B_1(t)$ согласно (14) наблюдается следующий эффект. В момент времени $t = 2$ решение изменяет свой вид, а при $t > \sqrt{6}$ решение не существует.

Выводы.

Для рассматриваемого случая при $0 < t < 2$ решение уравнений (1-4) при условиях (6-7) представляется в одном виде, при $2 < t < \sqrt{6}$ – в другом, и суммарное время жизни решения равно $\sqrt{6}$. То есть $t_* = \sqrt{6}$.

Литература

1). Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970.

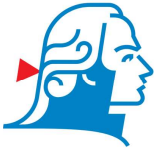
2). Aristov S.N., Polyanin A.D. New classes of exact solutions and some transformations of Navier-Stokes equations. – J. Mathematical Physics, v.17, №1, 2010, P. 1-18.

3). Charles L. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. – Preprint, Princeton univ., Princeton, 2000, P. 1-5.

4). Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: Уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость. – Успехи математических наук, 58:2 (350), 2003, С. 45-78.

5). Koptev A.V. Constructive method to solving 3D Navier-Stokes equations. – 8-th European congress of mathematics. Book of abstracts. – Slovenia, univ. of Primorska, 2021. – P. 638-639.

6). Коптев А.В. Точное решение 3D уравнений Навье-Стокса для случая потенциального движения несжимаемой жидкости. – Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, ВИНТИ РАН, 2023, т. 227, С. 41-50.



1 Введение

Рассмотрим систему нелинейных уравнений, описывающих динамику взаимосвязанных нелинейных осцилляторов. В общем случае система имеет вид [1]

$$M\ddot{r}_j = f(r_{j+1}) + f(r_{j-1}) - 2f(r_j). \quad (1)$$

$$f(r) = \begin{cases} \alpha, & r > 0 \\ 0, & r = 0 \\ -\beta, & r < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где α и β неотрицательные параметры.

2 Постановка задачи

Для системы из m одинаковых осцилляторов, связанных в кольцо, построим гладкое периодическое решение в виде дискретной бегущей волны. Это означает, что все компоненты представлены одной и той же периодической функцией $r(t)$ со сдвигом, кратным некоторому параметру Δ (который предстоит найти)

$$r_j = r(t + j\Delta), \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (3)$$

Кроме того, потребуем, чтобы $r(t)$ была гладкой функцией. Рассмотрим m -й осциллятор. Из условия закольцованности осцилляторов получаем $r_{m+1} = r_0$, что в свою очередь накладывает ограничение $r(t + (m+1)\Delta) \equiv r(t)$. Отсюда получаем «уравнение периодов», которому должно удовлетворять Δ :

$$(m+1)\Delta = nT(\Delta), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Проведем замену времени $t + j\Delta \mapsto t$. Из условия $r_0 = r_{m+1}$ знаем, что $r(t) = r(t + (m+1)\Delta)$. Получаем уравнение с 2-мя запаздываниями:

$$\ddot{r}(t) = f(r(t - \Delta)) + f(r(t - m\Delta)) - 2f(r(t)). \quad (5)$$

Зададим множество начальных функций:

$$S = \{\phi \in C[-m\Delta, 0] : \phi(t) < 0 \text{ при } t \in [-m\Delta, 0], \phi(0) = -d, \dot{\phi}(0) = c\}, \quad (6)$$

где d и c — неотрицательные параметры.

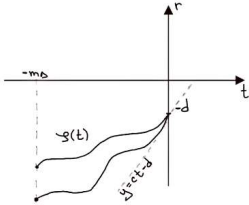


Рис. 1: Представители множества начальных функций

3 Результат

Теорема 1 Пусть запаздывание Δ удовлетворяет неравенству:

$$\Delta > \frac{d}{c} + \frac{c}{\alpha + \beta}, \quad (7)$$

тогда уравнение (5) с любой начальной функцией из множества (6) имеет $(m+1)\Delta$ -периодическое решение

$$r_*(t) = \begin{cases} ct - d, & t \in [0, t_1], \\ -At^2 + \frac{c^2 + 2Ad}{c}t - \frac{c^2d + Ad^2}{c^2}, & t \in [t_1, t_2], \\ -ct + \frac{c^2}{A} + d, & t \in [t_2, t_1 + \Delta], \\ \frac{A}{2}t^2 - \left(c + A\left(\frac{d}{c} + \Delta\right)\right)t + \left(\frac{c^2}{A} + d + \frac{A}{2}\left(\frac{d}{c} + \Delta\right)^2\right), & t \in [t_1 + \Delta, t_2 + \Delta], \\ \frac{c^2}{2A} - c\Delta, & t \in [t_2 + \Delta, t_1 + m\Delta], \\ \frac{A}{2}t^2 - A\left(\frac{d}{c} + m\Delta\right)t + \frac{A}{2}\left(\frac{d}{c} + m\Delta\right)^2 + \frac{c^2}{2A} - c\Delta, & t \in [t_1 + m\Delta, t_2 + m\Delta], \\ ct - c\Delta - mc\Delta - d, & t \in [t_2 + m\Delta, (m+1)\Delta], \end{cases} \quad (8)$$

где $t_1 = \frac{d}{c}$, $t_2 = \frac{d}{c} + \frac{c}{\alpha + \beta}$, $A = \alpha + \beta$. Заметим, что t_1 и t_2 являются корнями $r_*(t)$.

Схематический график функции $r_*(t)$ представлен на рисунке 2.

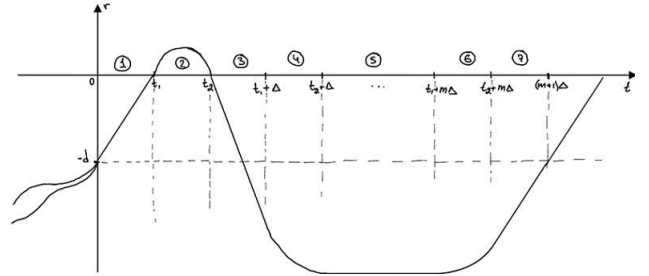


Рис. 2: Функция $r_*(t)$

Заметим, что для $T(\Delta) = (m+1)\Delta$ уравнение периодов (4) справедливо для $n = 1$.

Теорема 2 Пусть выполняется неравенство (7) из теоремы 1, тогда система (1) имеет решение вида

$$r_j = r_*(t + j\Delta), \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (9)$$

где $r_*(t)$ функция из теоремы 1.

4 Заключение

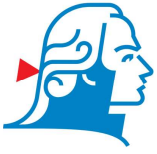
В работе рассмотрена система, описывающая взаимодействие m одинаковых осцилляторов. Для нее построено гладкое периодическое решение в виде дискретных бегущих волн. В дальнейшем можно исследовать вопрос существования дискретных бегущих волн для более широкой области параметра Δ , отказавшись от ограничения (7). Это отвечает другому расположению точек переключения $t_1 + \Delta$ и t_2 на шаге 2.

Благодарности

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Список литературы

- [1] Дж. Уизем, Линейные и нелинейные волны, Мир (1977) 584 - 588
- [2] M. Toda, Waves in Nonlinear Lattice, Supplement of the Progress of Theoretical Physics, No. 45 (1970) 174-200
- [3] M. Toda, Studies of a non-linear lattice, Physics Reports, Vol.18, iss. 1. (1975) 1 - 123
- [4] Глызин С. Д., Колесов А.Ю., Бегущие волны в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 61, № 1. С. 71-89. DOI: 10.31857/S004446692201
- [5] S.D. Glyzin, A.Yu. Kolesov., and N.Kh.Rozov, Periodic traveling - wave - type solutions in circular chains of unidirectionally coupled equations, Theor. Math. Phys. 175 (2013) 499 - 517



Дискретные бегущие волны в цепи нелинейных осцилляторов

Алина Кутузова^{1*}, Маргарита Преображенская^{1**}

¹Центр интегрируемых систем, ЯрГУ им. П.Г. Демидова

*postcrossing2002@mail.ru, **rita-uvarova@yandex.ru

1 Введение

Рассмотрим систему нелинейных уравнений, описывающих динамику взаимосвязанных нелинейных осцилляторов. В общем случае система имеет вид [1]

$$M\dot{r}_j = f(r_{j+1}) + f(r_{j-1}) - 2f(r_j), \quad (1)$$

$$f(r) = \begin{cases} \alpha, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \\ -\beta, & r < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где α и β неотрицательные параметры.

2 Постановка задачи

Для системы из m одинаковых осцилляторов, связанных в кольцо, построим гладкое периодическое решение в виде дискретной бегущей волны. Это означает, что все компоненты представлены одной и той же периодической функцией $r(t)$ со сдвигом, кратным некоторому параметру Δ (который предстоит найти)

$$r_j = r(t + j\Delta), \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (3)$$

Кроме того, потребуем, чтобы $r(t)$ была гладкой функцией. Рассмотрим m -й осциллятор. Из условия закольцованности осцилляторов получаем $r_{m+1} = r_0$, что в свою очередь накладывает ограничение $r(t + (m+1)\Delta) \equiv r(t)$. Отсюда получаем «уравнение периодов», которому должно удовлетворять Δ :

$$(m+1)\Delta = nT(\Delta), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Проведем замену времени $t + j\Delta \mapsto t$. Из условия $r_0 = r_{m+1}$ знаем, что $r(t) = r(t + (m+1)\Delta)$. Получаем уравнение с 2-мя запаздываниями:

$$\dot{r}(t) = f(r(t-\Delta)) + f(r(t-m\Delta)) - 2f(r(t)). \quad (5)$$

Зададим множество начальных функций:

$$S = \{\phi \in C[-m\Delta, 0] : \phi(t) < 0 \text{ при } t \in [-m\Delta, 0], \phi(0) = -d, \dot{\phi}(0) = c\}, \quad (6)$$

где d и c — неотрицательные параметры.

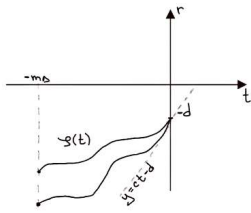


Рис. 1: Представители множества начальных функций

3 Результат

Теорема 1. Пусть запаздывание Δ удовлетворяет неравенству:

$$\Delta > \frac{d}{c} + \frac{c}{\alpha + \beta}, \quad (7)$$

тогда уравнение (5) с любой начальной функцией из множества (6) имеет $(m+1)\Delta$ -периодическое решение

$$r_*(t) = \begin{cases} ct - d, & t \in [0, t_1], \\ -At^2 + \frac{c^2 + 2Ad}{c}t - \frac{c^2d + Ad^2}{c^2}, & t \in [t_1, t_2], \\ -ct + \frac{c^2}{A} + d, & t \in [t_2, t_1 + \Delta], \\ \frac{A}{2}t^2 - \left(c + A\left(\frac{d}{c} + \Delta\right)\right)t + \\ + \left(\frac{c^2}{A} + d + \frac{A}{2}\left(\frac{d}{c} + \Delta\right)^2\right), & t \in [t_1 + \Delta, t_2 + \Delta], \\ \frac{c^2}{2A} - c\Delta, & t \in [t_2 + \Delta, t_1 + m\Delta], \\ \frac{A}{2}t^2 - A\left(\frac{d}{c} + m\Delta\right)t + \\ + \frac{A}{2}\left(\frac{d}{c} + m\Delta\right)^2 + \frac{c^2}{2A} - c\Delta, & t \in [t_1 + m\Delta, t_2 + m\Delta], \\ ct - c\Delta - mc\Delta - d, & t \in [t_2 + m\Delta, (m+1)\Delta], \end{cases} \quad (8)$$

где $t_1 = \frac{d}{c}$, $t_2 = \frac{d}{c} + \frac{c}{\alpha + \beta}$, $A = \alpha + \beta$. Заметим, что t_1 и t_2 являются корнями $r_*(t)$.

Схематический график функции $r_*(t)$ представлен на рисунке 2.

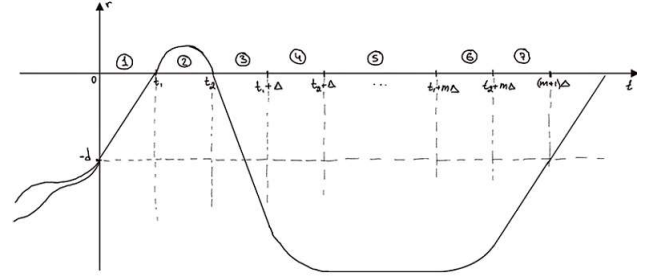


Рис. 2: Функция $r_*(t)$

Заметим, что для $T(\Delta) = (m+1)\Delta$ уравнение периодов (4) справедливо для $n = 1$.

Теорема 2. Пусть выполняется неравенство (7) из теоремы 1, тогда система (1) имеет решение вида

$$r_j = r_*(t + j\Delta), \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (9)$$

где $r_*(t)$ функция из теоремы 1.

4 Заключение

В работе рассмотрена система, описывающая взаимодействие m одинаковых осцилляторов. Для нее построено гладкое периодическое решение в виде дискретных бегущих волн. В дальнейшем можно исследовать вопрос существования дискретных бегущих волн для более широкой области параметра Δ , отказавшись от ограничения (7). Это отвечает другому расположению точек переключения $t_1 + \Delta$ и t_2 на шаге 2 .

Благодарности

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Список литературы

- [1] Дж. Уизем, Линейные и нелинейные волны, Мир (1977) 584 - 588
- [2] М. Toda, Waves in Nonlinear Lattice, Supplement of the Progress of Theoretical Physics, No. 45 (1970) 174-200
- [3] М. Toda, Studies of a non-linear lattice, Physics Reports, Vol.18, iss. 1. (1975) 1 - 123
- [4] Глызин С. Д., Колесов А.Ю., Бегущие волны в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 61, № 1. С. 71-89. DOI: 10.31857/S004446692201
- [5] S.D. Glyzin, A.Yu. Kolesov., and N.Kh.Rozov, Periodic traveling - wave - type solutions in circular chains of unidirectionally coupled equations, Theor. Math. Phys. 175 (2013) 499 - 517

Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Капуто — Фабрицио

Нагуманова Анна Викторовна, к.ф.-м.н., доцент

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

В данной работе исследуются начальная и обратная коэффициентная задачи для уравнения с производной Капуто — Фабрицио в банаховом пространстве. Пусть \mathcal{U}, \mathcal{Z} — банаховы пространства, через $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из \mathcal{U} в \mathcal{Z} , $\mathcal{L}(\mathcal{Z}) := \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{Z})$. Для эволюционного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad (1)$$

где D^α — дробная производная Капуто — Фабрицио, $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $g(t) \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, зададим начальное условие и условие переопределения

$$z(0) = z_0, \quad (2)$$

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}, \quad (3)$$

где μ — функция ограниченной вариации.

Пусть $T \in \mathbb{R}_+$, $0 < \alpha < 1$, \mathcal{Z} — банахово пространство, $f \in C^1([0, T]; \mathcal{Z})$. Дробная производная Капуто — Фабрицио порядка α [1] имеет вид

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)} f'(\tau) d\tau, \quad t \in (0, T).$$

Лемма. Если существует преобразование Лапласа для функции $f \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, то преобразования Лапласа от ее производной Капуто — Фабрицио имеет вид $D^\alpha f(\mu) = \frac{\mu f(\mu) - f(0)}{\mu(1-\alpha) + \alpha}$.

Задача Коши для однородного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t), \quad (4)$$

$$z(0) = z_0 \in \mathcal{Z}, \quad (5)$$

где D^α — дробная производная Капуто — Фабрицио, $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, т. е. линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве \mathcal{Z} . Решением задачи (4), (5) называется функция $z \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, которая удовлетворяет равенству (4) при $t \in \mathbb{R}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ и условию (5).

Лемма. Если решение задачи (4), (5) существует, то $z_0 \in \ker A$.

Теорема. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\frac{1}{1-\alpha} \in \rho(A)$, $z_0 \in \ker A$. Тогда функция $z(t) \equiv z_0$ является единственным решением задачи (4), (5).

Задача Коши для неоднородного уравнения

Рассмотрим задачу Коши

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad (6)$$

$$z(0) = z_0, \quad (7)$$

где D^α — дробная производная Капуто — Фабрицио, $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$. Решением задачи Коши (6), (7) назовем $z \in C^1([0, T]; \mathcal{Z})$, для которого выполняется равенство (6) при $t \in [0, T]$ и условие (7).

Лемма. Если решение задачи (6), (7) существует, то $Az_0 + f(0) = 0$.

Заметим, что $\frac{\mu}{\mu(1-\alpha) + \alpha} \rightarrow \frac{1}{1-\alpha}$ при $|\mu| \rightarrow \infty$.

При условии $\frac{1}{1-\alpha} \in \rho(A)$ и в силу открытости резольвентного множества $\rho(A)$ ограниченный обратный оператор $\left(\frac{\mu}{\mu(1-\alpha) + \alpha} - A\right)^{-1}$ существует при достаточно больших $r = |\mu| \geq r_0$. Определим

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} \left(\frac{\mu}{\mu(1-\alpha) + \alpha} - A\right)^{-1} \frac{e^{\mu t}}{\mu} d\mu, \quad t > 0.$$

Теорема. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\frac{1}{1-\alpha} \in \rho(A)$, $f \in C^1([0, T]; \mathcal{Z})$, $Az_0 + f(0) = 0$. Тогда функция

$$z(t) = z_0 + \int_0^t Z(t-s) f'(s) ds, \quad (8)$$

является единственным решением задачи Коши (6), (7).

Обратная задача

Пусть \mathcal{Z}, \mathcal{U} — банаховы пространства. Рассмотрим обратную задачу для эволюционного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

где D^α — дробная производная Капуто — Фабрицио, $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $g \in C^1([0, T]; \mathcal{Z})$, с начальным условием и условием переопределения

$$z(0) = z_0 \in \mathcal{Z}, \quad (10)$$

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}, \quad (11)$$

где функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ имеет ограниченную вариацию. Назовем элемент $u \in \mathcal{U}$ решением задачи (9)–(11), если соответствующее решение задачи Коши (9), (10) удовлетворяет условию (11).

Задачу (9)–(11) назовем корректной, если для любых $z_0, z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $u \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C (\|z_0\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C^1([0, T]; \mathcal{Z})}), \quad (12)$$

где $C > 0$ не зависит от z_0, z_T, g .

В силу представления решения (8) элемент u является решением задачи (9)–(11) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнению

$$\chi u = \psi, \quad (13)$$

где χ и ψ определены формулами

$$\chi := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z(t-s) B'(s) ds \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}),$$

$$\psi := z_T - \int_0^T d\mu(t) z_0 - \int_0^T \int_0^t Z(t-s) g'(s) ds d\mu(t) \in \mathcal{Z},$$

где $V_0^T(\mu)$ — вариация функции $\mu(t)$ на отрезке $[0, T]$. **Теорема.** Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\frac{1}{1-\alpha} \in \rho(A)$, $g \in C^1([0, T]; \mathcal{Z})$, $Az_0 + g(0) = 0$, $B \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $B(0) = 0$, $\mu \in BV([0, T]; \mathbb{C})$. Тогда обратная задача (9)–(11) корректна в том и только том случае, когда существует обратный оператор $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$. При этом решение имеет вид $u = \chi^{-1}\psi$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-21-20015.

Литература

[1] Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progress in Fractional Differentiation & Applications. 2015. Т. 1, № 2. С. 73–85.



Долгопериодическое лунное возмущение в колебательном движении земного полюса

Переёлкин В.В.¹, Румянцев Д.С.²

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ГОСУДАРСТВЕННЫЕ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ИНСТИТУТЫ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

С помощью численной обработки ряда С01 данных МСВЗ о движении земного полюса на интервале времени начиная с 1900 года показано наличие колебательного процесса, связанного с прессионным движением орбиты Луны. Предложено несколько способов преобразования координат земного полюса к системе, в которой его движение происходит синфазно с изменением ориентации плоскости лунной орбиты по отношению к экватору Земли. Параметры преобразования определяются средними параметрами движения земного полюса и не зависят явно от времени. Первый способ преобразования использует только численную обработку данных наблюдений, а второй использует кинематические свойства движения полюса.

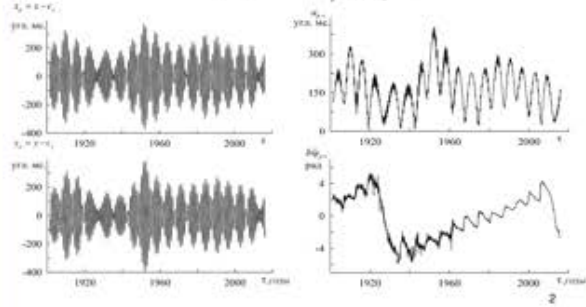
Преобразование задается уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= c_x + a_x \cos \psi_p, y = c_y + a_y \sin \psi_p & a_x, \psi_p & - \text{полярные координаты движения полюса в исходной системе} \\ x_1 &= a_1 \cos \delta \psi_p, y_1 = a_1 \sin \delta \psi_p & a_1, \delta \psi_p & - \text{полярные координаты после первого преобразования} \\ x_2 &= a_2 + b \cos \alpha, y_2 = b \sin \alpha & b, \delta \alpha & - \text{полярные координаты в окончательном системе} \\ z_2 &= b \cos \delta \alpha, z_2 = b \sin \delta \alpha \end{aligned}$$

1

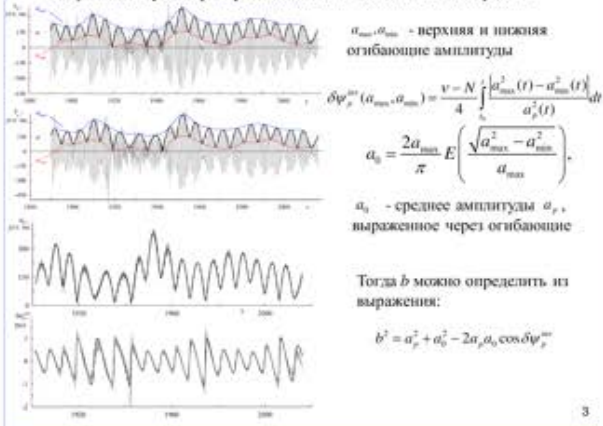
В результате **первого преобразования** полярный угол имеет кусочно-линейную часть, наклон которой меняется при изменении колебательного режима:

Координаты земного полюса (x_p, y_p) — Амплитуда a_p и вариация полярного угла $\delta \psi_p$



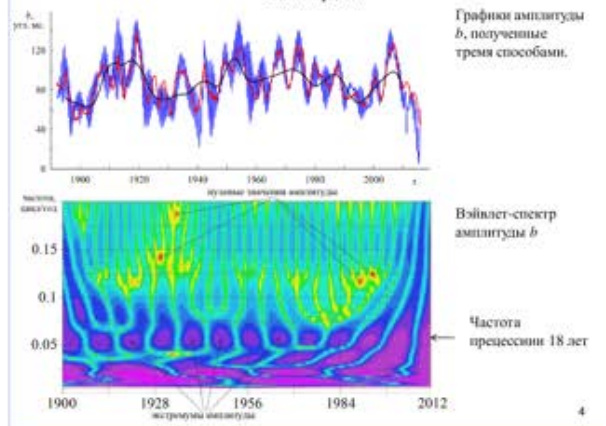
2

Результат **второго преобразования** и вычисление амплитуды b :



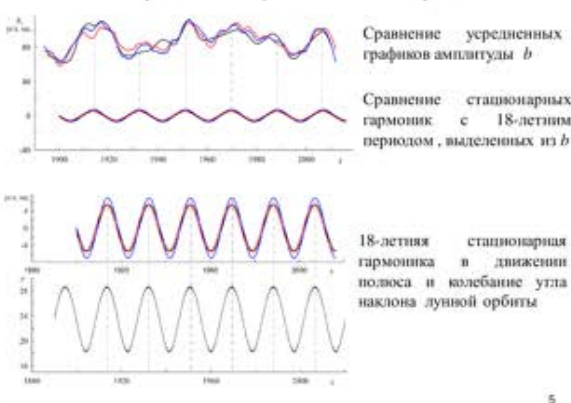
3

Амплитуда b



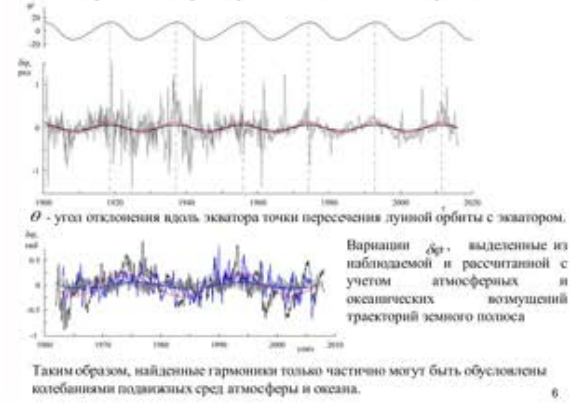
4

Вариации амплитуды b с 18-летним периодом



5

Вариации полярного угла $\delta \alpha$ с 18-летним периодом



6



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ИЗЫСНТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
УПРАВЛЕНИЯ
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Динамический анализ колебаний земного полюса с частотой прецессии лунной орбиты

Перепёлкин В.В.¹, Румянцев Д.С.²

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Механизм возбуждения чандлеровского колебания земного полюса является одним из интереснейших вопросов науки. Исследование переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса (как чандлеровской, так и годичной) важно для задачи прогнозирования движения полюса и необходимо для изучения механизма возбуждения и поддержания чандлеровского колебания.

Ранее была установлена синфазность вариаций параметров основных компонент (чандлеровского и годичного колебаний) движения земного полюса и прецессии лунной орбиты, выявлен нестационарный характер амплитуд найденного колебательного процесса в чандлеровской и годичной компонентах, а частоты и фазы достаточно стабильны. Это указывает на наличие регулярности возмущений, а размытость пиков в спектре, возникающая вследствие нестационарности амплитуд на влияние геофизических процессов. В то же время, найденные гармоники только частично могут быть обусловлены колебаниями подвижных сред атмосферы и океана.

1

Простейшая модель движения полюса представляет собой дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами относительно координат полюса x_p, y_p , содержащие диссипативные слагаемые, и правой частью M_x, M_y - обусловленной возмущениями различного характера (гравитационными, атмосферными, океаническими и другими), приводящими к наблюдаемому движению полюса. Однако исследуемые вариации даже с учётом известных геофизических возмущений не удаётся объяснить в рамках простейшей модели.

В данной работе исследуется механизм возбуждения найденных колебаний на основе более сложной модели полюсного прилива в дифференциальных уравнениях движения полюса:

$$\begin{cases} \dot{x}_p - (N + a_{\Omega}^c \cos \Omega + a_{\Omega}^s \sin \Omega) y_p = \sigma x_p + \mu_x, & x_p(t_0) = x_0 \\ \dot{y}_p + (N + a_{\Omega}^c \cos \Omega + a_{\Omega}^s \sin \Omega) x_p = \sigma y_p + \mu_y, & y_p(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

где N - чандлеровская частота, σ - коэффициент диссипации,

Ω - долгота восходящего узла орбиты Луны, совершающего оборот за 18 лет
 μ_x, μ_y - возмущения различного характера (гравитационные, атмосферные, океанические и другие), приводящие к наблюдаемому движению полюса

2

Структура долгопериодических возмущений

Для идентификации структуры возмущения в уравнениях (1), приводящего к вариациям параметров движения полюса, синфазных с прецессионным движением орбиты Луны определяются направляющие косинусы радиус-вектора Луны в проекциях на связанные с Землей оси. Они будут зависеть от угловых переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \delta_1, \delta_2, h = \varphi_3 - \Omega$ и истинной аномалии Луны i - наклона орбиты Луны



3

Тогда уравнения движения земного полюса (1) с учетом геофизических возмущений можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_p - N y_p + \frac{N}{2Q} x_p (1 + a_{\Omega} \cos \Omega) = N \chi_{F_x}^{geoph} + \frac{N}{2Q} \chi_{F_x}^{geoph}, \\ \dot{y}_p + N x_p + \frac{N}{2Q} y_p (1 - a_{\Omega} \cos \Omega) = N \chi_{F_y}^{geoph} - \frac{N}{2Q} \chi_{F_y}^{geoph}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\Omega = 677.3105 - 0.0009242 \cdot 365.25 \cdot t$$

t - земное время в годах.

$\chi_{F_x}^{geoph}, \chi_{F_y}^{geoph}$ - геофизическое возмущение от подвижных сред атмосферы и океана при $Q=100$

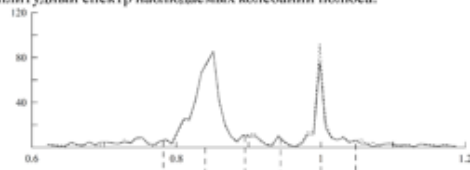
$N = 2\pi \cdot 0.843$ - чандлеровская частота, измеряемая в циклах/год

Уравнения (2) представляют собой уравнения с медленно меняющимися параметрами, а именно с 18-летней вариацией чандлеровской частоты, которая достаточно хорошо наблюдаема в чандлеровском периоде.

4

Сравнение спектров наблюдаемых и расчетных колебаний

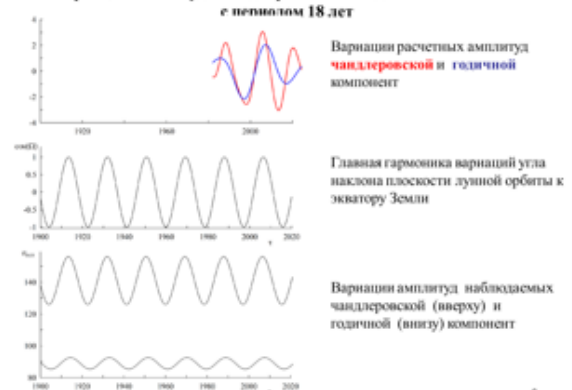
Амплитудный спектр наблюдаемых колебаний полюса:



Амплитудный спектр разности решений уравнений (2) при $a_{\Omega} = 12$ и $a_{\Omega} = 0$

5

Вариации амплитуды чандлеровского и годичного колебаний с пепилом 18 лет



6



МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВА В КВАДРАТНОЙ ЯЧЕЙКЕ



Посудневская А. О.^{1,2,3}, Долуденко А. Н.⁴

¹ Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка

² Институт Автоматизации проектирования РАН, Москва

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва

⁴ Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

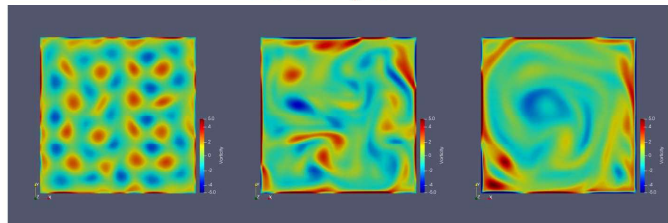
posudnevskaia.ao@phystech.edu, 8(903)976-51-90

В работе рассматривается классическая задача о двумерном движении жидкости под действием периодической в пространстве постоянной силы (Течение Колмогорова) [1].

Задача была поставлена А. Н. Колмогоровым для изучения двумерных турбулентных течений, интересной особенностью которой является тенденция к формированию когерентных вихрей и их затуханию за счет донного трения.

В данной работе на примере течения Колмогорова изучается двумерная турбулентность. Путем численного моделирования при различных параметрах получены следующие режимы течения: ЛАМИНАРНЫЙ, ХАОТИЧЕСКИЙ и ВИХРЕВОЙ [2].

Поле завихренности

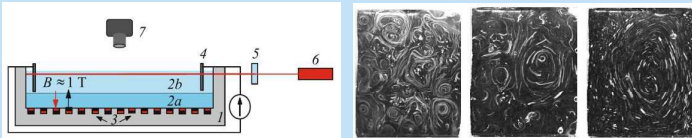


Ламинарный Хаотический Вихревой

ЦЕЛЬЮ ДАННОЙ РАБОТЫ ЯВЛЯЕТСЯ РАССМОТРЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ПОЛУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ.

Физический эксперимент

Данный эксперимент был выполнен в лабораторных условиях. Результаты численного эксперимента согласуются с лабораторными [3].



В ячейку из акрила (1) навивают электролит (2). Снизу расположена система магнитов (3). При помощи электродов (4) через электролит пропускают ток. Возникает сила Лоренца, приводящая жидкость в движение. Развитие течения подсвечивается лазером (6) и фиксируется на видеокамеру (7).

Система уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u V) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho G \sin ky + \mu \Delta u - \zeta u$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v V) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho G \sin kx + \mu \Delta v - \zeta v$$

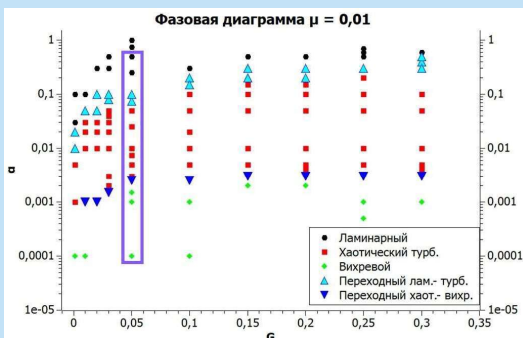
$$V = (u, v)^T$$

$$dp = c^2 \rho_0 \frac{d\rho}{\rho}$$

Красным выделена сила, привносящая энергию в систему. Зеленым – сила трения, за счет которой происходит диссипация на крупных масштабах. Для моделирования используется численный метод Мак-Кормака, имеющий второй порядок по пространству и времени.

Фазовая диаграмма

Построена фазовая диаграмма типов течений в зависимости от параметров моделирования в пространстве «амплитуда внешней силы – коэффициент трения $\alpha = \frac{\zeta}{\rho}$ ». Каждая точка соответствует расчету с определенными параметрами.

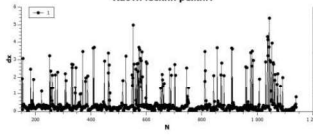


При каждом фиксированном значении силы наблюдаются все режимы течения: ламинарный при сильном трении, турбулентный при среднем трении, и вихревой при наименьших значениях коэффициента трения.

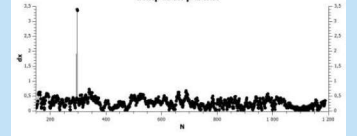
Метод 1. Отслеживание точки с максимальной завихренностью

Рассмотрим графики изменения координаты максимальной завихренности в зависимости от времени. Хаотическому режиму соответствуют скачкообразные изменения координаты максимальной завихренности. При вихревом режиме координата максимальной завихренности меняется слабо.

Изменение координаты точки максимальной завихренности Хаотический режим



Изменение координаты точки максимальной завихренности Вихревой режим

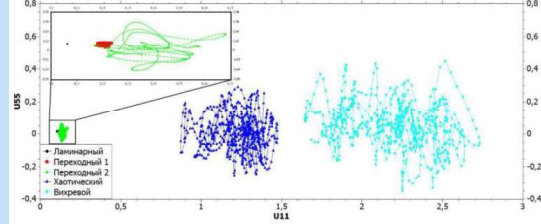


Метод 2. Анализ Фурье-компонент скорости

$$u(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) dx dy$$

Рассматриваем компоненты Фурье-разложения скорости на масштабе накачки U_{55} и на масштабе ячейки U_{11} . На плоскости (U_{11}, U_{55}) каждому режиму соответствует определенная область.

Зависимость USS от U11

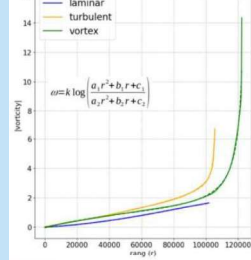


Метод 3. Ранговое распределение завихренности

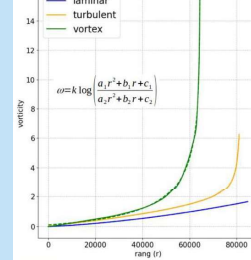
Рассматриваются все значения поля завихренности и распределяются по рангам в зависимости от их величины. Отдельно строятся ранговые распределения для положительной и отрицательной завихренности.

Ламинарному режиму соответствует почти линейная зависимость. Для хаотического и вихревого режима наблюдается резкое возрастание величины завихренности в области больших рангов.

rank(r) vs vorticity < 0



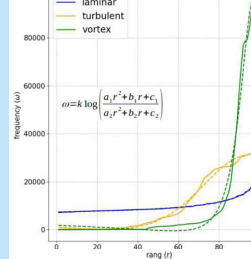
rank(r) vs vorticity > 0



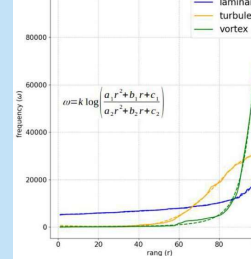
Метод 4. Ранговое распределение частот повторяемости завихренности

Рассматривается частота встречаемости завихренности и распределяется по рангам в зависимости от их количества. Графики ламинарного и вихревого течения выпуклы вниз, в то время как график для турбулентного режима имеет точку перегиба. Построены аппроксимации графиков логарифмом отношения полиномов второй степени.

rank(r) vs frequency (w)



rank(r) vs frequency (w)



Литература

[1] Kolokolov I. V., Lebedev V. V. Large-scale flow in two-dimensional turbulence at static pumping // JETP Lett. 2017. Vol. 106, 10, P. 659–661.
 [2] D. Doludenko, A. N., Fortova, S. V., Kolokolov, I. V., Lebedev, V. V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // Physics of Fluids. – 2021. – V. 33. – Paper 011704
 [3] Орлов А. В., Бражников М. Ю., Левченко А. А., Формирование крупномасштабного когерентного вихря в двумерной турбулентности. Письма в ЖЭТФ, том 107, вып. 3, с. 166 – 171, 2018

Дискретные бегущие волны в релейной системе дифференциально-разностных уравнений, моделирующей полностью связную сеть синаптически связанных нейронов

И. Е. Преображенский (preobrazenskii@gmail.com), М. М. Преображенская (rita.preo@gmail.com)

Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова, Центр интегрируемых систем



Уединенный нейрон

$$\dot{u} = \lambda F(u(t-1))u, \quad (1)$$

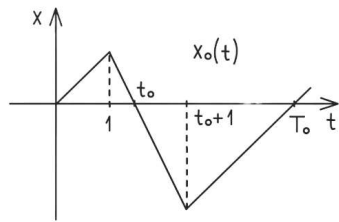
$u = u(t) > 0$ — нормированный мембранный потенциал нейрона, $\lambda > 0$ — скорость электрических процессов.

$$F(u) = \begin{cases} -a, & u \in (0, 1], \\ 1, & u > 1, \end{cases} \quad a > 0.$$

Уравнение (1) обладает орбитально устойчивым T_0 -периодическим решением $u(t) = e^{\lambda x_0(t)}$.

$$x_0(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ -a(t-t_0), & t \in [1, t_0+1], \\ t-T_0, & t \in [t_0+1, T_0], \end{cases} \quad (2)$$

$$x_0(t+T_0) = x_0(t), \quad t_0 = (a+1)/a, \quad T_0 = (a+1)^2/a.$$

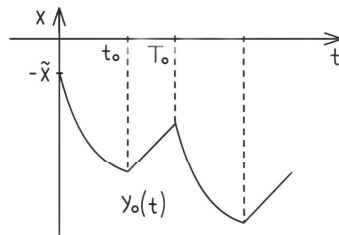


Функция y_0

Введем обозначение

$$y_0(\tilde{x}, t) = \begin{cases} (\tilde{x} - \frac{1}{b} - c)e^{-bt} + \frac{1}{b} + c, & t \in [0, t_0], \\ t - t_0 + y_0(\tilde{x}, t_0), & t \in [t_0, T_0], \end{cases} \quad (15)$$

$$y_0(\tilde{x}, t+T_0) = y_0(y_0(\tilde{x}, T_0), t), \quad \tilde{x} = y_0(0).$$



Разрешимость уравнения периодов (5)

Теорема 2. Зафиксируем натуральные числа $m \geq 2$ и n . Пусть 1) $a > 0, b > 0$; 2) c удовлетворяет (10) и

$$c > -2a - \frac{1}{b} - \frac{a+1}{1-e^{-bt_0}}; \quad (16)$$

3) запаздывания h_s удовлетворяют (11) и (12). Тогда существует $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, удовлетворяющие уравнению (5), причем

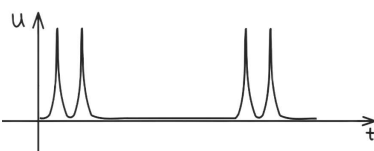
$$t_0 + (n-1)T_0 < |\Delta| < nT_0 + a(1 - e^{-nb_0}). \quad (17)$$

Периодическое решение системы (3)

Теорема 3. Пусть 1) n — фиксированное натуральное число, 2) параметры a, b, c, h_s ($s = 1, \dots, m$) удовлетворяют условиям теоремы 1, 3) $\lambda > 0$, 4) $\Delta \neq 0$ удовлетворяет уравнению периодов (5) при некотором целом $p \neq 0$, тогда существует h такое, что система (3) имеет $(m+1)!$ сосуществующих решений вида

$$u_k = e^{\lambda x(t+j_k\Delta)}, \quad (18)$$

где $x(t)$ описывается формулой (13), j_0, j_1, \dots, j_m представляют собой некоторую перестановку номеров $0, 1, \dots, m$. При этом каждая компонента обладает на периоде n «высокоамплитудными» (порядка e^λ) всплесками, после которых следует промежутки с «малыми» (порядка $e^{-\lambda}$) значениями функции $u_k(t)$. Величина $(m+1)\Delta$ кратна периоду этого решения.



Полностью связная система нейронов

$$\dot{u}_j = \left(\lambda F(u_j(t-1)) + G(u_0(t-h), \dots, u_{j-1}(t-h), u_{j+1}(t-h), \dots, u_m(t-h)) \cdot \ln \frac{u_*}{u_j} \right) u_j, \quad (3)$$

$$j = 0, 1, \dots, m, \quad G(u_1, \dots, u_m) = \begin{cases} 0, & \text{если для } \forall i \ u_i < 1, \\ b, & \text{если } \exists k \ u_k > 1, \end{cases} \quad b > 0.$$

Дискретные бегущие волны

Предположим, что

$$u_k(t) = u(t + j_k\Delta), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (4)$$

j_0, j_1, \dots, j_m обозначают некоторую перестановку номеров $0, 1, \dots, m$, параметр Δ и период $T = T(\Delta)$ функции $u(t)$ удовлетворяют уравнению периодов

$$(m+1)\Delta = pT(\Delta), \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (5)$$

При этом все уравнения системы (3) преобразуются в

$$\dot{u} = \left(\lambda F(u(t-1)) + G(u(t+m\Delta-h), \dots, u(t+\Delta-h)) \cdot \ln \frac{u_*}{u} \right) u. \quad (6)$$

Таким образом, задача поиска периодических решений системы (3) в виде дискретных бегущих волн (4) свелась к поиску периодической функции $u(t)$, удовлетворяющей (6), и параметра Δ таких, что период $T = T(\Delta)$ функции $u(t)$ удовлетворяет уравнению периодов (4) при некотором целом p .

Релейное уравнение с m запаздываниями

Вместо уравнения (6) рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = \left(\lambda F(u(t-1)) + G(u(t-h_1), \dots, u(t-h_m)) \cdot \ln \frac{u_*}{u} \right) u \quad (7)$$

с упорядоченными запаздываниями

$$h_1 < h_2 < \dots < h_m, \quad h_{s+1} = h_s + |\Delta|, \quad s = 1, \dots, m-1.$$

Переход к логарифмической шкале

Сделаем в (7) экспоненциальную замену переменных $u = e^{\lambda x}$, предполагая, что $u_* = e^{\lambda c}$, $c = \text{const}$:

$$\dot{x} = F(e^{\lambda x(t-1)}) + (c-x)G(e^{\lambda x(t-h_1)}, \dots, e^{\lambda x(t-h_m)}).$$

$$R(x) = F(e^{\lambda x}) = \begin{cases} -a, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$H(x_1, \dots, x_m) = G(e^{\lambda x_1}, \dots, e^{\lambda x_m}) = \begin{cases} 0, & \text{если для } \forall i \ x_i < 0, \\ b, & \text{если } \exists k \ x_k > 0. \end{cases}$$

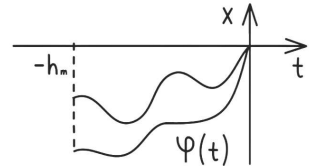
Новая неизвестная функция $x(t)$ удовлетворяет

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + (c-x)H(x(t-h_1), \dots, x(t-h_m)). \quad (8)$$

Начальное множество функций

В качестве множества начальных функций для уравнения (8) выберем

$$S = \{ \varphi \in C[-h_m, 0] : \varphi(0) = 0, \varphi(t) < 0 \text{ при } t \in [-h_m, 0] \}. \quad (9)$$



Решение релейного уравнения (8)

$$x_0^{(1)} = x_0(h_1), \quad x_0^{(s+1)} = h_{s+1} - h_s - t_0 - (n-1)T_0 + y_0(x_0^{(s)}, t_0 + (n-1)T_0), \quad s = 1, \dots, m-1.$$

Теорема 1. Зафиксируем натуральное число n . Пусть

1) параметры $a > 0, b > 0$ и c удовлетворяют ограничению

$$c < -a - \frac{1}{b} - \frac{a+1}{1-e^{-bt_0}} \quad (10)$$

2) запаздывания h_s удовлетворяют неравенствам

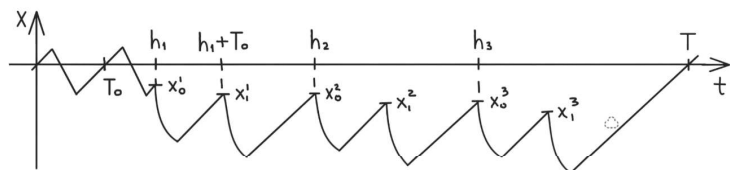
$$(n-1)T_0 + t_0 + 1 < h_1 < nT_0, \quad (11)$$

$$t_0 + (n-1)T_0 < h_{s+1} - h_s < nT_0 + a(1 - e^{-nb_0}), \quad s = 1, \dots, m-1; \quad (12)$$

Тогда уравнение (8) с любой начальной функцией из множества (9) имеет T -периодическое решение

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [0, h_1] \\ y_0(x_0^{(s)}, t - h_s), & t \in [h_s, h_s + t_0 + (n-1)T_0], \quad s = 1, \dots, m, \\ t - h_s - t_0 - (n-1)T_0 + y_0(x_0^{(s)}, t_0 + (n-1)T_0), & t \in [h_s + t_0 + (n-1)T_0, h_{s+1}], \quad s = 1, \dots, m-1, \\ t - h_m - t_0 - (n-1)T_0 + y_0(x_0^{(m)}, t_0 + (n-1)T_0), & t \in [h_m + t_0 + (n-1)T_0, T], \end{cases} \quad (13)$$

$$T = h_m + t_0 + (n-1)T_0 - (x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c)e^{-bt_0} - \frac{1}{b} - c. \quad (14)$$



Ссылки

[1] Преображенский И. Е., Преображенская М. М. Дискретные бегущие волны в релейной системе дифференциально-разностных уравнений, моделирующей полностью связную сеть синаптически связанных нейронов // ПНД. 2024 Т. 32, № 5.
 [2] Glyzin S. D., Preobrazhenskaya M. M. Multistability and Bursting in a Pair of Delay Coupled Oscillators With a Relay Nonlinearity // IFAC PAPERSONLINE. 2019. Vol. 52, no. 18. P. 109–114.
 [3] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112.

Благодарности

Работа выполнена частично (Преображенская М. М.) за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, https://rscf.ru/project/22-11-00209; частично (Преображенский И. Е.) в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного центра (НОЦ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Создание и предоставление из федерального бюджета субсидии № 075-02-0025-948).



Критерий хаотичности лоренцевских отображений в терминах символической динамики

Решетилов Роман Николаевич, Малкин Михаил Иосифович
ННГУ им. Лобачевского, Нижний Новгород

Лоренцевские отображения

• **Определение.** Под лоренцевским отображением f будем понимать разрывное отображение интервала $[0; 1]$ с точкой разрыва c , удовлетворяющее условиям:

- f монотонно возрастает и непрерывна на каждом из интервалов $[0; c)$ и $(c; 1]$
- $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = 0$

Лоренцевские отображения моделируют отображения Пуанкаре систем с аттрактором типа Лоренца [1].

Символическая модель

- Рассмотрим пространство односторонних последовательностей $\{-; +\}^{\mathbb{Z}^+}$ с топологией тихоновского произведения и лексикографическим порядком.
- Для точки $x \in [0; 1]$, если $\forall n : f^n(x) \neq c$, определим последовательность $K_x(f) \in \{-; +\}^{\mathbb{Z}^+}$ посещений каждого из промежутков монотонности $([0; c) \rightarrow -; (c; 1] \rightarrow +)$. Будем называть $K_x(f)$ нидинг-последовательностью (нидингом) точки x . Если $f^n(x) = c$, можно определить $K_{x-}(f) = \lim_{y \rightarrow x-0} K_y(f)$ и $K_{x+}(f) = \lim_{y \rightarrow x+0} K_y(f)$.
- Определение.** Последовательности $K_0(f) = K_{0+}(f)$, $K_1(f) = K_{1-}(f)$ называются нидинг-инвариантами лоренцевского отображения f .
- Пара нидинг-инвариантов является символическим описанием отображения f , а в случае плоскости прообразов точки разрыва c – полным инвариантом топологической сопряжённости.
- Определение.** Последовательность $K \in \{-; +\}^{\mathbb{Z}^+}$ будем называть $(K_0; K_1)$ -допустимой (f -допустимой), если для некоторого $x \in [0; 1]$: $K = K_{x-}(f)$ или $K = K_{x+}(f)$. Множество всех допустимых нидингов отображения f будем обозначать A_f . f -допустимость K равносильна условию:

$$K_0(f) \leq \sigma^n(K) \leq K_1(f)$$

• Пусть i -й символ K : $s_i(K)$. Определим множество вращения $\rho(f)$:

$$\bar{\rho}(f, x) = \bar{\rho}(K_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{\{+\}}(s_i(K_x));$$

$$\rho(f) = \{\bar{\rho}(K_x) | K_x \in A_f\}$$

- Множество вращения лоренцевского отображения – точка или невырожденный замкнутый интервал. Невырожденность интервала вращения говорит о сильном хаотическом поведении: положительности энтропии и существовании периодических траекторий любого периода больше некоторого натурального M [2].

Конечные слова

- Периодические нидинг-последовательности удобно анализировать с помощью конечных слов. Конечное слово можно определить как функцию $w : [N] \rightarrow \{-; +\}$, где $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$.
- Для слова X над алфавитом мощности 2 можно определить инверсию $I(X)$ и инверсию первого символа $I_1(X)$.
- Определение.** На множестве конечных слов определим циклическую перестановку $\sigma : \sigma(aX) = Xa$. Если два слова X и Y таковы, что $Y = \sigma(X)$, то X и Y называются сопряжёнными.
- Помимо сопряжённости, введём на множестве конечных слов отношение сопряжённости с точностью до инверсии \sim . Будем говорить, что $X \sim Y$, если X сопряжено с Y или с $I(Y)$.

Слова Линдона и нетривиальные нидинги

- Определение.** Словом Линдона называется наименьшая из циклических перестановок примитивного (не являющегося натуральной степенью) слова. Множество слов Линдона обозначим L .
- Теорема 1.** Пусть f лоренцевское отображение с периодическими нидинг-инвариантами $K_0(f) = (U_0)$; $K_1(f) = (U_1)$. Тогда U_0 и $I(U_1)$ слова Линдона.
- Определение.** Будем называть слово Линдона U особым, если существует n такое, что $\sigma^n(U) > I_1(U)$.

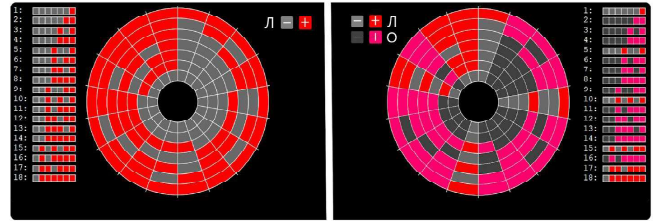


Рис. 1. Слова Линдона (слева) и особые (справа) длины 7.

- Всякое особое слово U единственнейшим образом представимо в виде $U = -V + W$, где $\sigma^N(U) = +W - V > +V + W$, причём число $N - N(U) - \min\{n_i > 0 | \sigma^{n_i}(U) > +V + W\}$. Далее особое слово будем обозначать $U = E_{V,W} = -V + W$.

• **Лемма 2:**

$$(E_{V,W}) \in A_f \implies (V+) \in A_f$$

- Определение.** Нетривиальным пазовём нидинг K , f -допустимость которого влечёт невырожденность интервала вращения $\rho(f)$.
- Теорема 3 (достаточное условие).** Нидинг $K = (U)$ нетривиален, если существует $E_{V,W} \sim U$ и при этом $\bar{\rho}(E_{V,W}) \neq \bar{\rho}(V+)$.
- Следующая лемма обосновывает алгоритм для построения интервала вращения лоренцевского отображения по инвариантам его символической модели (в случае их периодичности).
- Лемма 4.** Определим функции $g : L \rightarrow L$:

$$g(K) = \begin{cases} K & K \neq E_{V,W} \\ V+ & K = E_{V,W} \end{cases}$$

и $g^* : I(L) \rightarrow I(L)$; $g^*(K) = IgI(K)$. Пусть нидинг-инварианты отображения f периодичны: $K_0(f) = (U_0)$, $K_1(f) = (U_1)$. Тогда

$$\rho(f) = [\bar{\rho}(g(U_0)); \bar{\rho}(g^*(U_1))]$$

- Из леммы также следует, что для нидинг-последовательности $K = (U)$, где U не особо, можно предъявить отображение f такое, что $K \in A_f$ и при этом $\rho(f) = \{\bar{\rho}(K)\}$. Например, $K_0(f) = (U_S)$ и $K_1(f) = (U_L)$, где U_S и U_L – соответственно, наименьшая и наибольшая циклическая перестановка слова U . Итак, справедлива:
- Теорема 5.** Периодическая нидинг-последовательность $K = (U)$ является нетривиальной тогда и только тогда, когда найдётся слово $E_{V,W}$ такое, что $U \sim E_{V,W}$ и для $E_{V,W}$ выполнено неравенство вращений $\bar{\rho}(E_{V,W}) \neq \bar{\rho}(V+)$.

Список литературы

- [1] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих неглубоких предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Труды московского математического общества. 1982. т.44. с. 150–212.
- [2] Malkin M. I. Rotation intervals and the dynamics of Lorenz type mappings // Sel. math. Sov. Vol. 10. 1991. No 3. pp. 265–275.



Numerical implementation of multipoint formulas for inverse problems

V.N. Sivkin¹ and R.G. Novikov²

¹Lomonosov MSU, ²École polytechnique de Paris

ABSTRACT

This poster is devoted to multipoint formulas for finding leading coefficients in asymptotic expansions arising scattering theories. We implement different formulas for finding the Fourier transform of potential from the scattering amplitude at several high energies. We show that the aforementioned approach can be used for essential numerical improvements of classical results including the slowly convergent Born-Faddeev formula for inverse scattering at high energies. In addition, we show that the aforementioned multipoint formulas admit an efficient regularization for the case of random noise.

INTRODUCTION

Many functions of scattering theory admit asymptotic expansions $z(s)$, $s \in (r, +\infty)$ of the form with leading coefficient

$$z(s) = a_1 + \frac{a_2}{s} + \frac{a_3}{s^2} + \dots + \frac{a_N}{s^{N-1}} + \mathcal{O}(s^{-N}), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

The most important information is contained in a_1 (and/or some next leading terms). How find a_1 from $z(s)$ given at n points $s + \tau_1 < s + \tau_2 < \dots < s + \tau_n$ better than $\mathcal{O}(s^{-1})$?

METHODOLOGY

In turn, according to [Novikov] a_1 can be found with high accuracy from z given at n points $s + \tau_1 < s + \tau_2 < \dots < s + \tau_n$ via formulas

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{j=1}^n y_j(s, \bar{\tau}) z(s + \tau_j) + \mathcal{O}(s^{-n}), \quad s \rightarrow +\infty, \\ y_j(s, \bar{\tau}) &= (-1)^n \frac{(s + \tau_j)^{n-1}}{\alpha_j(\bar{\tau}) \beta_{n,j}(\bar{\tau})} = \mathcal{O}(s^{n-1}), \\ \alpha_j(\bar{\tau}) &= \prod_{i=1}^{j-1} (\tau_j - \tau_i), \quad \beta_{n,j}(\bar{\tau}) = \prod_{i=j+1}^n (\tau_i - \tau_j). \end{aligned} \quad (2)$$

But these formulas are unstable to noise:

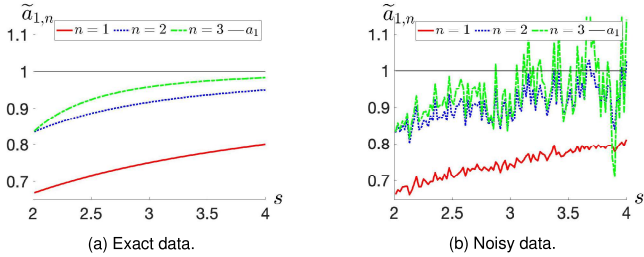


Figure 1: n -point reconstructions $a_{1,n}(s)$ of $a_1 = 1$ for $z(s) = s/(s+1)$ with $\tau_j = j-1$. (a) Two- and three-point formulas rapidly converge to exact value. (b) Two- and three-point formulas are unstable to noise.

We propose a regularisation method with a parameter r . We construct

$$\tilde{a}_{1,n}^r = \sum_{j=1}^n y_j^r(s, \bar{\tau}) z(s_j(s)), \quad (3)$$

where $y^r = (y_1^r, \dots, y_n^r)$ depends only on n and r , and $r \in [n^{-1/2}, \|(y_{1,n}, \dots, y_{n,n})\|]$. In particular, $\|y^r\| = r$. We want that the reconstruction $\tilde{a}_{1,n}^r$ had the following properties:

- the dispersion of reconstruction $\tilde{a}_{1,n}^r$ from noisy data is bounded by

$$\mathbb{D}(\tilde{a}_{1,n}^r(s, \bar{\tau})) \leq r^2 c^2 \quad \text{independently of } s; \quad (4)$$

- for the noiseless function z , the regularized reconstruction is the best possible under the condition $\|y^r\| \leq r$.

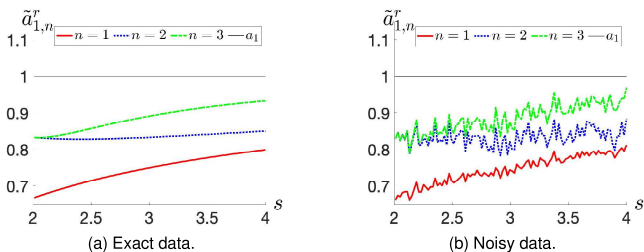


Figure 2: n -point regularized reconstructions $\tilde{a}_{1,n}^r(s)$ of $a_1 = 1$ for $z(s) = s/(s+1)$ with $\tau_j = j-1$. Regularization parameter $r = \sqrt{5}$. (a) Two- and three-point regularized formulas converge to exact value, but not so rapid as in Figure 1(a). (b) Two- and three-point regularized formulas are stable to noise.

RESULTS

We consider the stationary Schrödinger equation $-\Delta\psi + v\psi = E\psi$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, $E > 0$. Solutions describing scattering of planar wave

$$\psi^+(x, k) = \underbrace{e^{ikx}}_{\text{planar wave}} + \underbrace{\frac{e^{i|k||x|}}{|x|^{(d-1)/2}} c(d, |k|)}_{\text{leading spherical wave}} \underbrace{f[v](k, |k| \frac{x}{|x|})}_{\text{scattering amplitude}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{(d+1)/2}}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

The main scattering functions are:

- f - scattering amplitude (or far-field),
- ψ^+ - near-field,
- $|f|^2$ - differential scattering cross section,
- $|\psi^+|^2$ - amplitude of near-field.

Inverse problem: given f , find v .

- (Born, Faddeev): $f(k, l) = \hat{v}(k-l) + \mathcal{O}(\sqrt{E}^{-1})$, as $E \rightarrow +\infty$, $|k| = |l| = \sqrt{E}$.
- (Buslaev, Melrose, Yafaev) For $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, scattering amplitude f has the expansion

$$f(s) = \hat{v} + \sum_{j=2}^N \frac{a_j}{s^{j-1}} + \mathcal{O}(s^{-N}), \quad |f(s)|^2 = |\hat{v}|^2 + \sum_{j=2}^N \frac{a_j}{s^{j-1}} + \mathcal{O}(s^{-N}), \quad \text{as } s \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Therefore, if the scattering amplitude for **several** energy levels ($s = \sqrt{E}$) is provided, we reconstruct \hat{v} more precisely.

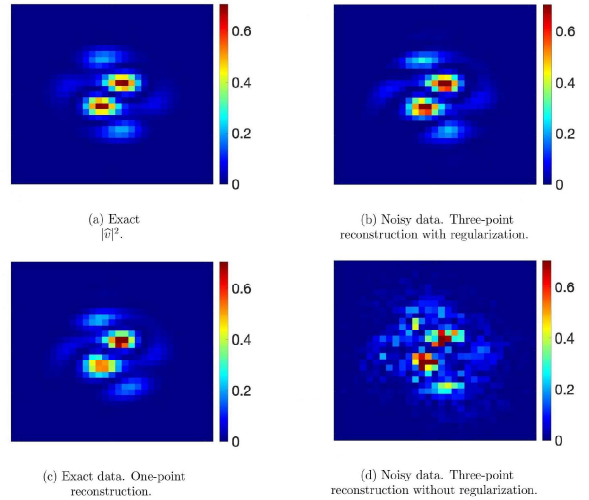


Figure 3: Exact $|\hat{v}|^2$ and examples of its phaseless inverse scattering reconstructions.

- (a) Exact $|\hat{v}|^2$.
- (b) Regularized reconstruction $|\hat{v}|_{noisy}^{2,3,r}$ from noisy $|f|^2$ at $E = 25^2, 30^2, 35^2$. Regularization parameter $r = \sqrt{10}$.
- (c) Reconstruction $|\hat{v}|_{noisy}^{2,1}$ from $|f|^2$ at $E = 35^2$.
- (d) Reconstruction $|\hat{v}|_{noisy}^{2,3}$ from noisy $|f|^2$ at $E = 25^2, 30^2, 35^2$ without regularization.

CONCLUSION

In this work we study reconstruction of the leading coefficient a_1 in expansion (1) from measurements of z at *several* sufficiently large points s (multipoint reconstruction approach). In particular, we present the first numerical implementation of the recent theoretical formulas on this reconstruction. Our results include an efficient regularization of these multipoint formulas for the case of random noise. We demonstrated that such approach lead to efficient numerical results.

Important advantages of the aforementioned multipoint approach consist in explicit reconstruction formulas, easy and fast numerical implementation, considerable increasing in precision already for the two-point case, small or moderate number of measurements required for reconstruction.

In our opinion, the results of the present work open perspectives of numerical applications of the aforementioned multipoint studies to different inverse and direct problems.

The talk is based on

Novikov R. G., Sivkin V. N., Sabinin G. V. Multipoint formulas in inverse problems and their numerical implementation // Inverse Problems. – 2023. – №. 12. – . 125016.

Чилина Екатерина Евгеньевна

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

k.chilina@yandex.ru



Основные определения

Инвариантное множество B гомеоморфизма f называется **аттрактором**, если существует замкнутая окрестность U множества B такая, что $f(U) \subset \text{int } U$, $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = B$. Аттрактор для гомеоморфизма f^{-1} называется **репеллером** гомеоморфизма f .

Гомеоморфизм $P: S_g \rightarrow S_g$ замкнутой ориентируемой поверхности рода $g > 1$ называется **псевдоаносовским отображением** с растяжением $\lambda > 1$, если на поверхности S_g существует пара P -инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}_P^s, \mathcal{F}_P^u$ с множеством седловых особенностей S и трансверсальными мерами μ_s, μ_u такая, что:

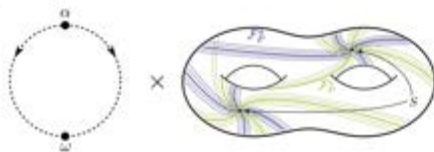
- каждая седловая особенность из S имеет не менее трех сепаратрис;
- $\mu_s(P(\alpha)) = \lambda \mu_s(\alpha)$ ($\mu_u(P(\alpha)) = \lambda^{-1} \mu_u(\alpha)$) для любой дуги α , трансверсальной \mathcal{F}_P^s (\mathcal{F}_P^u).

Подпространство X топологического пространства Y называется **цилиндрическим вложением** в Y топологического пространства \tilde{X} , если существует гомеоморфизм на образ $h: \tilde{X} \times [-1, 1] \rightarrow Y$ такой, что $X = h(\tilde{X} \times \{0\})$.

Исследуемый класс \mathcal{G}

Обозначим через \mathcal{G} множество гомеоморфизмов, каждый из которых является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом f замкнутого ориентируемого топологического 3-многообразия, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из конечного числа компонент связности B_1, \dots, B_m , удовлетворяющих для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ следующим условиям:

1. B_i является цилиндрическим вложением замкнутой ориентируемой поверхности рода большего единицы;
2. существует натуральное число k_i такое, что $f^{k_i}(B_i) = B_i$, $f^{k_i}(B_i) \neq B_i$ для любого натурального $\tilde{k}_i < k_i$ и ограничение отображения $f^{k_i}|_{B_i}$ топологически сопряжено сохраняющему ориентацию псевдоаносовскому гомеоморфизму;
3. B_i является либо аттрактором, либо репеллером гомеоморфизма f^{k_i} .



Построение класса Φ

Рассмотрим псевдоаносовский гомеоморфизм $P: S_g \rightarrow S_g$ и сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $J: S_g \rightarrow S_g$ такие, что $JP = PJ$ и гомеоморфизм $J^l P^k$, является сохраняющим ориентацию псевдоаносовским гомеоморфизмом, где $l \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ и $(l, k) = 1$. Положим $M_J = (S_g \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней гомеоморфизма $\gamma: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$. Через $p_J: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$ обозначим естественную проекцию.

Пусть $\psi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла с неблуждающим множеством, состоящим из $2nk$ периодических точек периода k , и числом вращения, равным $\frac{l}{k}$. Через $\tilde{\psi}: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ обозначим его поднятие. Определим отображение $\tilde{\varphi}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ формулой $\tilde{\varphi}(z, r) = (P(z), \tilde{\psi}(r))$. Тогда корректно определен гомеоморфизм $\varphi: M_J \rightarrow M_J$, заданный формулой

$$\varphi(w) = p_J(\tilde{\varphi}(p_J^{-1}(w))),$$

где $p_J^{-1}(w)$ – полный прообраз точки $w \in M_J$. Обозначим через Φ множество всех гомеоморфизмов построенных таким образом.

Лемма [1] *Множество Φ является подмножеством \mathcal{G} .*

Основной результат

Гомеоморфизмы $f_1: X \rightarrow X$ и $f_2: Y \rightarrow Y$ топологических многообразий X и Y называются **объемлюще Ω -сопряженными**, если существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow Y$ такой, что $h(NW(f_1)) = NW(f_2)$ и $hf_1|_{NW(f_1)} = f_2h|_{NW(f_1)}$.

Теорема [1] *Любой гомеоморфизм из класса \mathcal{G} является объемлюще Ω -сопряженным некоторому гомеоморфизму из класса Φ .*

Список литературы

- [1] Grines V. Z., Pochinka O. V., Chilina E. E., On Homeomorphisms of Three-Dimensional Manifolds with Pseudo-Anosov Attractors and Repellers, Regular and Chaotic Dynamics, 2024, Volume 29, Number 1, pp. 156-173

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.



О размерности Минковского некоторых инвариантных подмножеств динамических систем

Ягилев А.А., Починка О.В.

Высшая школа экономики, Нижний Новгород



Размерность Минковского

Определение 1. Покрывающая множества X называется набор $U = \{U_j\}_{j \in J}$ открытых подмножеств $U_j \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\bigcup_{j \in J} U_j \supset X$. Для $\varepsilon > 0$ покрытие U называется ε -покрывающей множества X , если $\text{diam}(U_j) \leq \varepsilon$ для любого $j \in J$.

Везде далее речь пойдет об ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Для любого такого множества E и любого $\varepsilon > 0$ корректно определены числа

$$N(E, \varepsilon) = \min \{ \text{card}(U) : U - \varepsilon\text{-покрытие множества } E \}, \quad (1)$$

Верхней (нижней) размерностью Минковского множества E называют верхний (нижний) пределы:

$$\overline{\dim}_M(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad \left(\underline{\dim}_M(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right). \quad (2)$$

Когда верхний и нижний пределы совпадают, то предельно

$$\dim_M(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (3)$$

называется размерностью Минковского.

Вычисление размерности Минковского для графиков функций $\phi_{a,b}$

Рассмотрим непрерывную функцию $\phi_{a,b} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, для положительных параметров a, b определенной формулой

$$\phi_{a,b}(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим через

$$\Gamma_{a,b} = \{(x, \phi_{a,b}(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 1]\}$$

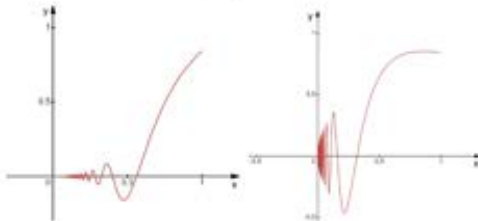
график функции $\phi_{a,b}$.

Предложение 1. Функция $\phi_{a,b}(x)$ является C^∞ -гладкой по обеим и малым по обеим, когда $a > 0$ и n

Теорема 1. Размерность Минковского графика $\Gamma_{a,b}$ функции $\phi_{a,b}(x)$ (4) равна

$$\dim_M(\Gamma_{a,b}) = 2 - \frac{a+1}{b+1}, \quad a < b, \quad (5)$$

$$\dim_M(\Gamma_{a,b}) = 1, \quad a \geq b. \quad (6)$$



Свойства потраекторного отображения в окрестности линейного седла

Пусть в \mathbb{R}^2 задано векторное поле V системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x; \\ \dot{y} = \lambda_2 y; \\ \dot{z} = -\mu z, \end{cases} \quad (7)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu > 0$. Построенное векторное поле обращается в 0 в единственной точке $(0, 0, 0)$, которая является седловым состоянием равновесия. Пусть

$$\Pi_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, z > 0\} \cup \{(0, 0, 1)\},$$

$$\Pi_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x > 0\} \cup \{(1, 0, 0)\}$$

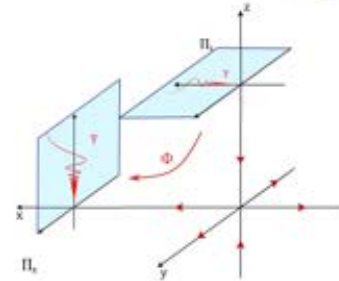
и $\Phi : \Pi_+ \rightarrow \Pi_-$ – отображение (см. Рис.)

$$\Phi(x, y, 1) = (1, y, z), \quad (8)$$

вдоль траекторий потока, порожденного полем V , по непрерывности продолженное на точку $(0, 0, 1)$ условием $\Phi(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$.

Лемма 1. Для любой кривой $\gamma \subset \Pi_+$, являющейся графиком функции $y = \phi(x)$, кривая $\gamma = \Phi(\gamma) \subset \Pi_-$ является графиком функции $y = \psi(z)$, где

$$\psi(z) = z^{\frac{b}{a}} \phi\left(z^{\frac{1}{a}}\right). \quad (9)$$



Лемма 2. Пусть, в условиях леммы 1, гладкая кривая $\gamma \subset \Pi_+$ является графиком функции $y = \phi_{a,b}(x)$ (4) для некоторых $a > b + 1 > 1$ и векторное поле V удовлетворяет условию

$$(a - b)\lambda_1 < \lambda_2. \quad (10)$$

Тогда кривая $\gamma = \Phi(\gamma) \subset \Pi_-$ имеет размерность Минковского больше единицы.

Основная теорема

В настоящем разделе мы построим регулярный диффеоморфизм с фрактальной размерностью западения седловой сепаратрисы. Для этого рассмотрим C^∞ -гладкую функцию $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, заданную формулой

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Определим C^∞ -гладкую функцию $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ формулой

$$\sigma(x) = \frac{g(x+1)}{g(1-x) + g(x+1)}.$$

Зададим C^∞ -гладкую функцию $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$v(x) = (1 - \sigma(x-2))x - \sigma(x-2)(x-4).$$

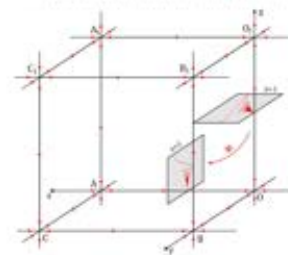
Рассмотрим в \mathbb{R}^2 векторное поле W , заданное системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 v(x); \\ \dot{y} = \lambda_2 v(y)(1 - 2\sigma(x-2)); \\ \dot{z} = -\mu v(z)(1 - 2\sigma(x-2)), \end{cases} \quad (11)$$

где $(a - b)\lambda_1 < \lambda_2$ для некоторых $a > b + 1 > 1$.

Обозначим через f сдвиг на единицу времени потока, порожденного векторным полем W . Неблизкая множества Ω_\pm диффеоморфизма f состоит из восьми неподвижных гиперболических точек

$$\begin{aligned} &O(0, 0, 0), A(4, 0, 0), B(0, 4, 0), C(4, 4, 0), \\ &O_1(0, 0, 4), A_1(4, 0, 4), B_1(0, 4, 4), C_1(4, 4, 4). \end{aligned}$$



Теорема 2. Существует диффеоморфизм $f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varepsilon \in [0, 1]$ такая, что

- $f_\varepsilon = f$;
- $\Omega_\pm = \Omega_\pm^\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1]$;
- $\dim_M(\text{cl}(W_{\Omega_\pm}^\varepsilon)) > 2$.

Список литературы

[1] А.А. Андронов, Е.А. Леонтович. Векторные случаи зависимости предельных циклов от параметра // Соч. академика Горьк. ун-та. 1937. Т. 5. С. 3-24.
 [2] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems // Ber. Math.-Phys. Sächsischer Akademie der Wissenschaften, Leipzig. 1942. V. 94. P. 1-22.
 [3] С.В. Зелик. Атракторы. Тогда и сейчас // Успехи математических наук. 2023. Т. 78, № 4. С. 52-198.



Синхронизация медленно осциллирующих решений в системе связанных уравнений с запаздыванием нейтрального типа



Якубив Ю.А.
yuliyayakubiv1004t@gmail.com

Ярославль, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \alpha \cdot \text{sign}(\dot{x}(t-T)) + \gamma(y-x), \\ \dot{y} + y = \alpha \cdot \text{sign}(\dot{y}(t-T)) + \gamma(x-y), \end{cases} \quad (1)$$

где $T > 0$, $\alpha < 0$ и $\gamma \geq 0$.

Будем рассматривать начальные условия на отрезке $[-T, 0]$, такие что

$$\begin{cases} \dot{x} > 0 \text{ при } t \in [-T, -\theta T], \\ \dot{x} < 0 \text{ при } t \in [-\theta T, 0], \\ \dot{y} > 0 \text{ при } t \in [-T, 0], \\ x(0) = h_x, y(0) = h_y, \end{cases} \quad (2)$$

где $\theta \in [0, 1]$: $\theta = 0 \implies$ синхронизация, $\theta = 1 \implies$ антисинхронизация (противоположный характер монотонности).

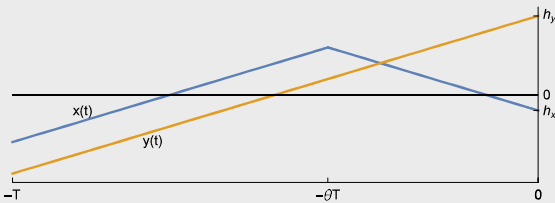


Рис. 1: Вид начальных условий.

Построение решений

Обозначим как $x_1(t), y_1(t)$ решение уравнения (1) с начальными условиями (2) при $t \in [0, T - \theta T]$, а $x_2(t), y_2(t)$ — при $t \in [T - \theta T, T]$. Тогда эти решения имеют вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} \left(\frac{h_x + h_y}{2} - \alpha \right) + e^{-(1+2\gamma)t} \left(\frac{h_x - h_y}{2} \right) + \alpha \\ y_1(t) = e^{-t} \left(\frac{h_y + h_x}{2} - \alpha \right) + e^{-(1+2\gamma)t} \left(\frac{h_y - h_x}{2} \right) + \alpha \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_2(t) = e^{-t} \left(\frac{h_x + h_y}{2} - \alpha(1 - e^{T(1-\theta)}) \right) + \\ e^{-(1+2\gamma)t} \left(\frac{h_x - h_y}{2} + \frac{\alpha e^{(1+2\gamma)(1-\theta)T}}{1+2\gamma} \right) - \frac{\alpha}{1+2\gamma} \\ y_2(t) = e^{-t} \left(\frac{h_y + h_x}{2} - \alpha(1 - e^{T(1-\theta)}) \right) + \\ e^{-(1+2\gamma)t} \left(\frac{h_y - h_x}{2} - \frac{\alpha e^{(1+2\gamma)(1-\theta)T}}{1+2\gamma} \right) + \frac{\alpha}{1+2\gamma} \end{cases} \quad (4)$$

Лемма 1. Функция вида $f(t) = c_0 + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ может иметь не более одного экстремума.

Следствие леммы 1: Производная функции вида $f(t)$ имеет один и тот же знак на отрезке $[t_1, t_2]$ тогда и только тогда, когда производные этой функции в граничных точках имеют один и тот же знак.

Графики

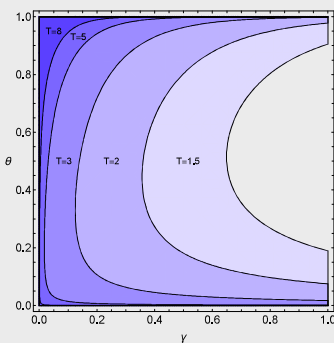


Рис. 2: Множества выполнения неравенства (7) для различных параметров γ и θ при $T = 1.5, 2, 3, 5, 8$.

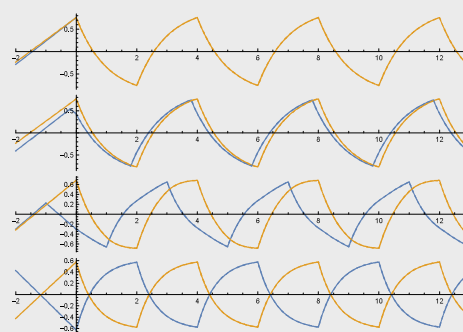


Рис. 3: Периодическое решение при $T = 2$, $\gamma = 0.3$, $\theta = 0, 0.1, 0.5, 1$ соответственно.

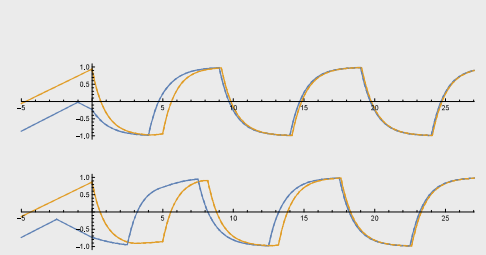


Рис. 4: Случай невыполнения условия (7) при $T = 5$, $\gamma = 0.1$, $\theta = 0.2, 0.5$.

Существование периодического решения

Потребуем, чтобы найденное решение на отрезке $[0, T]$ имело тот же вид, что и на начальном отрезке, только с противоположными знаками неравенств:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) < 0, t \in [0, T - \theta T], \dot{x}_2(t) > 0, t \in [T - \theta T, T], \\ \dot{y}_1(t) < 0, t \in [0, T - \theta T], \dot{y}_2(t) < 0, t \in [T - \theta T, T]. \end{cases} \quad (5)$$

По следствию из леммы 1, условие (5') эквивалентно

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) < 0, \dot{x}_1(T - \theta T) < 0, \dot{x}_2(T - \theta T) > 0, \dot{x}_2(T) > 0, \\ \dot{y}_1(0) < 0, \dot{y}_1(T - \theta T) < 0, \dot{y}_2(T - \theta T) < 0, \dot{y}_2(T) < 0. \end{cases} \quad (5')$$

При таких требованиях, на отрезке $[T, 2T]$ решение уравнения (1) ищется аналогично решению на отрезке $[0, T]$.

Лемма 2. Пусть выполнены неравенства (5) для решения $x(t), y(t)$ начальной задачи (1), (2). Тогда соотношения $x(2T) = h_x, y(2T) = h_y$ верны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} h_x = h_x^*, \\ h_y = h_y^*, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} h_x^* = \alpha \frac{e^{2T(1+\gamma)(1+\theta)} - e^{T(1+2\gamma+\theta)} - e^{T(2+2\gamma+\theta)} + 2e^{T(1+2\gamma+2\theta)}(1+\gamma) + (1+2\gamma)(e^{2T(1+\gamma)\theta} - e^{T(1+\theta+2\gamma\theta)} - e^{T(2+\theta+2\gamma(1+\theta))}}{e^{2T(1+\gamma)(1+\theta)} + e^{T(1+2\gamma+\theta)} + e^{T(2+2\gamma+\theta)} + 2e^{T(1+2\gamma+2\theta)}(1+\gamma) + (1+2\gamma)(e^{2T(1+\gamma)\theta} - e^{T(1+\theta+2\gamma\theta)} - e^{T(2+\theta+2\gamma(1+\theta))}}, \\ h_y^* = \alpha \frac{-e^{2T(1+\gamma)(1+\theta)} + e^{T(1+2\gamma+\theta)} + e^{T(2+2\gamma+\theta)} + 2e^{T(1+2\gamma+2\theta)}(1+\gamma) + (1+2\gamma)(e^{2T(1+\gamma)\theta} - e^{T(1+\theta+2\gamma\theta)} - e^{T(2+\theta+2\gamma(1+\theta))}}{e^{2T(1+\gamma)(1+\theta)} + e^{T(1+2\gamma+\theta)} + e^{T(2+\theta+2\gamma(1+\theta))}. \end{cases}$$

Устойчивость

Определение. Решение уравнения (1) с начальным условием

$$x(t) = \varphi_x(t), y(t) = \varphi_y(t) \text{ при } t \in [-T, 0]$$

называется C^1 -устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: для любого решения $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ уравнения (1) с начальными условиями

$$\tilde{x}(t) = \psi_x(t), \tilde{y}(t) = \psi_y(t) \text{ при } t \in [-T, 0]$$

такими, что из условия

$$\max \left\{ |\varphi_x(t) - \psi_x(t)|, |\varphi_y(t) - \psi_y(t)|, |\dot{\varphi}_x(t) - \dot{\psi}_x(t)|, |\dot{\varphi}_y(t) - \dot{\psi}_y(t)| \right\} < \delta, \text{ при } t \in [-T, 0],$$

следует

$$\max \{ |x(t) - \tilde{x}(t)|, |y(t) - \tilde{y}(t)| \} < \varepsilon, \text{ при } t \in [0, +\infty).$$

Теорема 1. При условиях (5) и (6) решение уравнения (1) с начальными условиями (2) является периодическим, и оно асимптотически C^1 -устойчиво.

Теорема 2. При условии (6) из неравенства $\dot{y}_2(T) < 0$ следуют все неравенства (5). Таким образом, в теореме 1 условие (5) можно заменить на условие

$$2e^{(2\gamma+1)\theta T} + e^{(2\gamma+1)(\theta+1)T} - e^{2T(\gamma(1+\theta)+1)} + e^{2T(2\gamma+1)\theta+1} + e^{2T(1+\gamma)} + e^{T(1+2\gamma)} - e^{T(1+2\gamma\theta)} > 0, \quad (7)$$

эквивалентное условию $\dot{y}_2(T) \Big|_{\substack{h_x=h_x^* \\ h_y=h_y^*}} < 0$.

Публикации

Якубив Ю.А. Периодические решения дифференциального уравнения с разрывной запаздывающей обратной связью нейтрального типа // Теоретическая и математическая физика, 2024. Т. 3, No 219.

